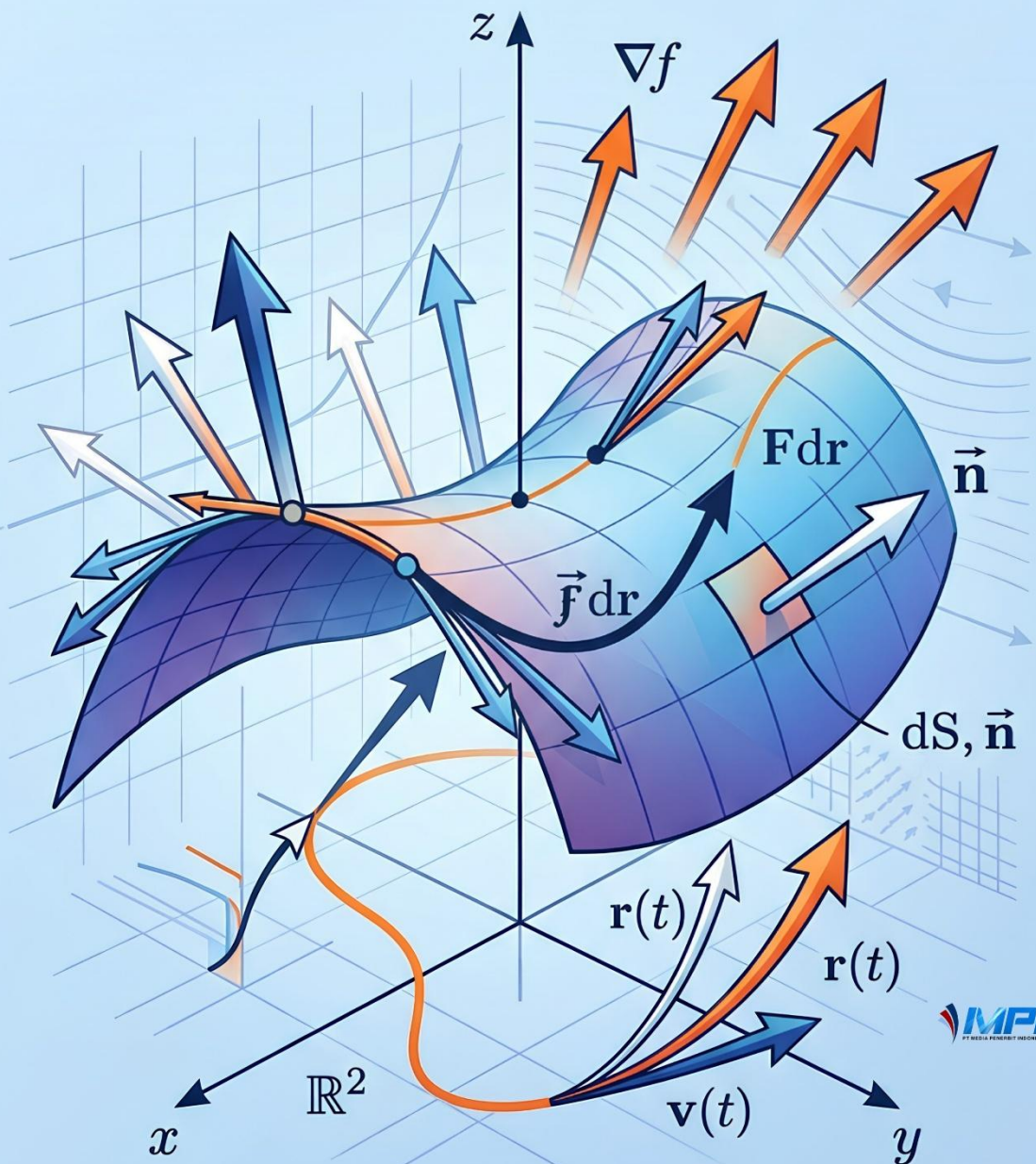


Buku Referensi

KAJIAN TEORITIS ANALISIS VEKTOR DAN PENERAPANNYA PADA GEOMETRI ANALITIK DAN KALKULUS MULTIVARIABEL



Fitriana Minggani, S.Si., M.Si.

BUKU REFERENSI
KAJIAN TEORITIS
ANALISIS VEKTOR DAN
PENERAPANNYA PADA
GEOMETRI ANALITIK
DAN KALKULUS
MULTIVARIABEL

Fitriana Minggani, S.Si., M.Si.



KAJIAN TEORITIS ANALISIS VEKTOR DAN PENERAPANNYA PADA GEOMETRI ANALITIK DAN KALKULUS MULTIVARIABEL

Ditulis oleh:

Fitriana Minggani, S.Si., M.Si.

Hak Cipta dilindungi oleh undang-undang. Dilarang keras memperbanyak, menerjemahkan atau mengutip baik sebagian ataupun keseluruhan isi buku tanpa izin tertulis dari penerbit.



ISBN: 978-634-316-054-0
IV+ 179 hlm; 18,2 x 25,7 cm.
Cetakan I, Agustus 2026

Desain Cover dan Tata Letak:
Ajrina Putri Hawari, S.AB.

Diterbitkan, dicetak, dan didistribusikan oleh
PT Media Penerbit Indonesia
Royal Suite No. 6C, Jalan Sedap Malam IX, Sempakata
Kecamatan Medan Selayang, Kota Medan 20131
Telp: 081362150605
Email: ptmediapenerbitindonesia@gmail.com
Web: <https://mediapenerbitindonesia.com>
Anggota IKAPI No.088/SUT/2024



KATA PENGANTAR

Buku referensi “Kajian Teoritis Analisis Vektor dan Penerapannya pada Geometri Analitik dan Kalkulus Multivariabel” hadir sebagai respons terhadap kebutuhan akan literatur matematika yang komprehensif, sistematis, dan relevan dalam memahami konsep-konsep analisis vektor serta penerapannya pada berbagai bidang matematika tingkat lanjut. Analisis vektor tidak sekadar menjadi kajian abstrak mengenai besaran, arah, dan operasi matematis, melainkan juga merupakan landasan penting dalam memahami geometri analitik, kalkulus multivariabel, fisika, teknik, dan berbagai disiplin ilmu lainnya.

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang semakin kompleks, pemahaman terhadap konsep vektor menjadi semakin penting. Vektor berperan dalam merepresentasikan posisi, arah, gaya, perpindahan, serta berbagai fenomena multidimensional secara matematis. Melalui pendekatan analisis vektor, konsep-konsep seperti ruang berdimensi tinggi, garis dan bidang, fungsi multivariabel, turunan parsial, gradien, divergensi, *curl*, integral garis, integral permukaan, hingga teorema-teorema fundamental dalam kalkulus multivariabel dapat dipahami secara lebih terstruktur dan mendalam.

Buku ini disusun dengan pendekatan teoritis dan aplikatif yang mengintegrasikan konsep dasar analisis vektor dengan penerapannya pada geometri analitik dan kalkulus multivariabel. Semoga buku ini dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan pemahaman matematika, menjadi referensi bagi mahasiswa, pendidik, peneliti, dan pembaca yang ingin memperdalam kajian analisis vektor serta penerapannya dalam berbagai bidang ilmu.

Salam Hangat

Tim Penulis

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

20%

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii

BAB I HAKIKAT DAN PERKEMBANGAN ANALISIS VEKTOR

.....	1
A. Pengertian dan Ruang Lingkup Analisis Vektor	2
B. Sejarah Perkembangan Analisis Vektor	5
C. Peranan Analisis Vektor dalam Matematika dan Sains	8
D. Keterkaitan Analisis Vektor dengan Geometri Analitik dan Kalkulus Multivariabel	12

BAB II KONSEP DASAR VEKTOR

A. Besaran Skalar dan Besaran Vektor Tusi	15
B. Notasi dan Representasi Vektor.....	18
C. Vektor pada Bidang dan Ruang.....	21
D. Panjang, Arah, dan Komponen Vektor.....	24

BAB III OPERASI ALJABAR PADA VEKTOR

A. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor.....	29
B. Perkalian Vektor dengan Skalar	33
C. Kombinasi Linear Vektor	35
D. Sifat-Sifat Operasi Aljabar Vektor	37

BAB IV PRODUK VEKTOR DAN INTERPRETASI

GEOMETRIS.....	41
A. Produk Titik (<i>Dot Product</i>)	42
B. Produk Silang (<i>Cross Product</i>).....	45
C. Proyeksi dan Resolusi Vektor.....	50
D. Interpretasi Geometris Produk Vektor.....	53

BAB V SISTEM KOORDINAT DAN TRANSFORMASI

VEKTOR.....	59
A. Sistem Koordinat Kartesius	59
B. Sistem Koordinat Polar, Silinder, dan Bola.....	62
C. Transformasi Antar Sistem Koordinat.....	67
D. Representasi Vektor pada Berbagai Sistem Koordinat.....	71

BAB VI RUANG VEKTOR DAN STRUKTUR ALJABARNYA . 75

A. Konsep Ruang Vektor.....	75
B. Subruang, Basis, dan Dimensi	79
C. Kebebasan dan Ketergantungan Linear	80
D. Ruang Bentang dan Transformasi Linear	83

BAB VII ANALISIS VEKTOR DALAM GEOMETRI ANALITIK

BIDANG	89
A. Persamaan Garis dalam Bentuk Vektor	90
B. Kedudukan Dua Garis pada Bidang	93
C. Jarak dan Sudut pada Bidang.....	99
D. Aplikasi Vektor dalam Pemecahan Masalah Geometri Bidang.....	106

BAB VIII ANALISIS VEKTOR DALAM GEOMETRI

ANALITIK RUANG	111
A. Persamaan Garis dalam Ruang Tiga Dimensi	112
B. Persamaan Bidang dalam Ruang	115
C. Hubungan Garis dan Bidang dalam Ruang	118
D. Jarak dan Sudut dalam Geometri Ruang	120

BAB IX FUNGSI VEKTOR DAN KURVA PARAMETRIK 125

A. Pengertian Fungsi Vektor	126
B. Kurva Parametrik pada Bidang dan Ruang	127
C. Turunan Fungsi Vektor.....	128
D. Aplikasi Fungsi Vektor pada Gerak dan Lintasan	131

BAB X MEDAN VEKTOR DAN DIFERENSIASI VEKTOR	135
A. Konsep Medan Skalar dan Medan Vektor.....	136
B. Operator Gradien (Gradient).....	138
C. Divergensi dan <i>Curl</i>	140
D. Interpretasi Geometris dan Fisis Medan Vektor	142
 BAB XI ANALISIS VEKTOR DALAM KALKULUS	
MULTIVARIABEL.....	147
A. Fungsi Multivariabel dan Turunan Parsial	148
B. Diferensial Total dan Turunan Berarah	149
C. Gradien dan Bidang Singgung.....	151
D. Optimasi Fungsi Multivariabel dan Pengali Lagrange	154
 BAB XII INTEGRAL VEKTOR DAN APLIKASI LANJUT	157
A. Integral Garis dan Integral Permukaan	158
B. Teorema Green, Teorema Stokes, dan Teorema Divergensi Gauss.....	160
C. Penerapan Analisis Vektor dalam Sains dan Rekayasa...	162
D. Arah Pengembangan Analisis Vektor dalam Matematika Modern.....	163
 DAFTAR PUSTAKA	167
GLOSARIUM	169
INDEKS	175
BIOGRAFI PENULIS.....	179



BAB I

HAKIKAT DAN PERKEMBANGAN ANALISIS VEKTOR

Matematika sebagai ilmu deduktif berkembang melalui abstraksi konsep-konsep konkret menjadi struktur formal yang berlaku umum. Salah satu abstraksi yang paling berpengaruh dalam sejarah matematika dan sains adalah konsep *vektor*, yaitu suatu besaran yang tidak hanya memiliki nilai numerik tetapi juga arah dalam ruang. Kehadiran analisis vektor sebagai cabang matematika yang mandiri tidak lepas dari kebutuhan mendesak dalam fisika klasik, khususnya mekanika dan elektromagnetisme, untuk merepresentasikan besaran-besaran seperti gaya, kecepatan, percepatan, dan medan listrik secara ringkas dan konsisten (Tromba & Marsden, 2022).

Kajian pada bab ini penting untuk dipahami secara mendalam sebelum memasuki pembahasan teknis pada bab-bab selanjutnya, sebab pemahaman terhadap hakikat suatu cabang ilmu akan menentukan cara pandang pembaca terhadap seluruh materi yang dipelajari. Seorang pembelajar yang memahami analisis vektor semata sebagai kumpulan teknik hitung akan cenderung menghafal rumus tanpa memahami mengapa rumus tersebut berlaku, sedangkan pembelajar yang memahami hakikat dan konteks historisnya akan mampu melihat keterkaitan antar-konsep secara lebih bermakna (Suryadi & Turmudi, 2023). Oleh karena itu, uraian pada bab ini disusun tidak hanya sebagai pengantar administratif, melainkan sebagai fondasi epistemologis bagi keseluruhan buku.

A. Pengertian dan Ruang Lingkup Analisis Vektor

Secara etimologis, istilah *vector* berasal dari bahasa Latin *vehere* yang berarti "membawa" atau "mengangkut", mengacu pada gagasan perpindahan suatu titik ke titik lain dengan jarak dan arah tertentu. Dalam pengertian matematis modern, analisis vektor (*vector analysis*) didefinisikan sebagai cabang matematika yang mempelajari besaran-besaran vektor beserta operasi aljabar dan kalkulus yang berlaku atasnya, mencakup operasi penjumlahan, perkalian, diferensiasi, dan integrasi baik terhadap vektor tunggal maupun terhadap medan vektor (Colley, 2021). Cabang ini berbeda dari aljabar vektor semata karena analisis vektor secara khusus menaruh perhatian pada perubahan vektor terhadap parameter, termasuk kajian tentang fungsi vektor, medan skalar, dan medan vektor yang berubah menurut posisi dalam ruang.

Ruang lingkup analisis vektor pada dasarnya terbagi menjadi dua kelompok besar, yaitu aljabar vektor dan kalkulus vektor. Aljabar vektor mengkaji operasi-operasi dasar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar, produk titik, dan produk silang, yang seluruhnya berlaku pada vektor sebagai objek statis, artinya vektor dipandang sebagai entitas tetap yang tidak bergantung pada parameter tertentu. Sebaliknya, kalkulus vektor mengkaji perubahan vektor terhadap suatu parameter atau posisi, termasuk turunan fungsi vektor, gradien medan skalar, divergensi dan *curl* medan vektor, serta integral garis dan integral permukaan (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Kedua kelompok ini saling melengkapi dan menjadi fondasi bagi pengembangan teori medan yang lebih luas, termasuk dalam mekanika fluida, elektrodinamika, dan relativitas.

Dipandang dari perspektif struktur matematika, analisis vektor tidak berdiri sendiri melainkan berpijak pada aljabar linear, khususnya konsep ruang vektor (*vector space*) sebagai struktur aljabar abstrak yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Dengan demikian, vektor-vektor geometris yang biasa digambarkan sebagai anak panah dalam bidang atau ruang merupakan salah satu realisasi konkret dari konsep ruang vektor yang lebih abstrak. Pemahaman ini penting karena memungkinkan perluasan gagasan vektor ke ruang berdimensi tinggi maupun ke ruang fungsi, yang keduanya banyak dijumpai dalam

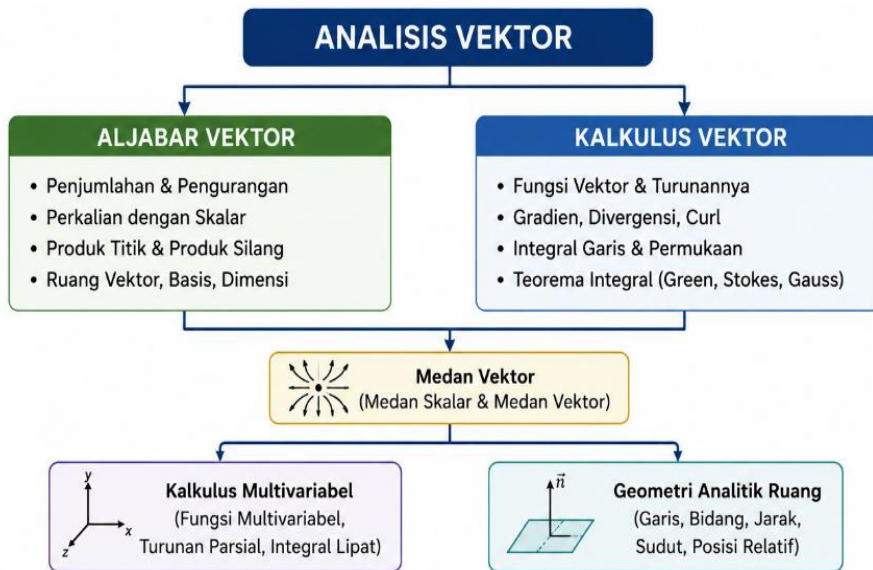
matematika terapan dan rekayasa modern, termasuk dalam pemrosesan sinyal digital dan pembelajaran mesin.

Selain dua kelompok utama tersebut, ruang lingkup analisis vektor kontemporer juga mencakup kajian tentang sistem koordinat lengkung (*curvilinear coordinates*), teori medan tensor sebagai generalisasi vektor, serta penerapan teorema-teorema integral vektor seperti teorema Green, teorema Stokes, dan teorema divergensi Gauss yang menjembatani integral pada suatu daerah dengan integral pada batasnya (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Cakupan yang luas ini menjadikan analisis vektor sebagai salah satu materi inti dalam kurikulum matematika dan fisika di perguruan tinggi, sekaligus sebagai alat analisis yang tidak tergantikan dalam berbagai bidang keilmuan terapan, mulai dari teknik sipil hingga ilmu data.

Dua pendekatan berbeda dapat digunakan untuk mendefinisikan vektor secara formal, yaitu pendekatan operasional dan pendekatan aksiomatis. Pendekatan operasional mendefinisikan vektor melalui cara ia dibentuk dan dioperasikan, misalnya sebagai pasangan atau triplel bilangan yang dijumlahkan dan dikalikan mengikuti aturan tertentu, sebagaimana lazim diajarkan pada tingkat pengantar. Sebaliknya, pendekatan aksiomatis mendefinisikan vektor sebagai anggota sembarang himpunan yang dilengkapi struktur ruang vektor, tanpa merujuk pada representasi konkret tertentu (Axler, 2024; Suryadi & Turmudi, 2023).

Perlu pula ditegaskan batas ruang lingkup analisis vektor terhadap cabang-cabang matematika yang berdekatan. Analisis vektor berbeda dari aljabar linear murni karena aljabar linear lebih menitikberatkan pada struktur ruang vektor abstrak, transformasi linear, dan teori matriks tanpa selalu melibatkan interpretasi geometris eksplisit, sedangkan analisis vektor secara konsisten mempertahankan tautan antara representasi aljabar dan makna geometrisnya (Nicholson, 2021). Demikian pula, analisis vektor berbeda dari kalkulus skalar tunggal karena objek yang dikaji bukan lagi bilangan real tunggal, melainkan besaran yang memiliki komponen jamak dan sifat keterarahan. Perbedaan-perbedaan mendasar ini penting dipahami agar pembaca tidak mencampuradukkan metode dan notasi antar-cabang ilmu yang sebenarnya memiliki tujuan kajian yang berbeda.

Gambar 1.1 Peta Konsep Ruang Lingkup Analisis Vektor



Gambar di atas memperlihatkan pembagian ruang lingkup analisis vektor menjadi dua cabang utama yang saling berkaitan. Aljabar vektor menyediakan kerangka operasi dasar yang bersifat statis, sedangkan kalkulus vektor membangun kerangka analisis dinamis yang memperhitungkan perubahan terhadap parameter atau posisi. Kedua cabang ini bertemu pada kajian medan vektor, yang menjadi jembatan menuju penerapan dalam kalkulus multivariabel dan geometri analitik ruang (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Pemahaman terhadap ruang lingkup ini juga relevan secara pedagogis. Sejumlah kajian pendidikan matematika menunjukkan bahwa mahasiswa yang diperkenalkan pada peta konsep menyeluruh sebelum mempelajari materi secara terperinci cenderung memiliki pemahaman struktural yang lebih baik dibandingkan mahasiswa yang langsung dihadapkan pada prosedur teknis tanpa kerangka besar (Suryadi & Turmudi, 2023). Oleh sebab itu, penyajian ruang lingkup analisis vektor pada bagian pembuka buku ini dimaksudkan sebagai peta jalan konseptual yang akan terus dirujuk pada bab-bab berikutnya, khususnya ketika pembahasan beralih dari aljabar vektor menuju kalkulus vektor pada paruh kedua buku.

B. Sejarah Perkembangan Analisis Vektor

Akar historis analisis vektor dapat ditelusuri hingga upaya para matematikawan abad ke-19 dalam mencari representasi geometris bagi bilangan kompleks. William Rowan Hamilton, melalui penemuan *quaternion* pada tahun 1843, menjadi salah satu pelopor yang berusaha memperluas bilangan kompleks dua dimensi menjadi sistem bilangan empat dimensi yang mampu merepresentasikan rotasi dalam ruang tiga dimensi (Crowe, 2021). Meskipun *quaternion* Hamilton pada mulanya dianggap sebagai puncak pencapaian aljabar geometris, kerumitan strukturnya yang melibatkan satu komponen skalar dan tiga komponen imajiner dengan aturan perkalian tidak komutatif mendorong lahirnya sistem notasi vektor yang lebih sederhana dan praktis untuk keperluan fisika terapan.

Kontribusi penting berikutnya datang dari Hermann Grassmann, yang pada tahun 1844 menerbitkan karya *Die lineale Ausdehnungslehre* yang memperkenalkan konsep ruang berdimensi- n dan operasi aljabar linear secara abstrak, jauh mendahului notasi modern yang kita kenal sekarang. Grassmann memperkenalkan gagasan tentang perkalian luar (*exterior product*) yang kelak menjadi cikal bakal aljabar geometris modern dan aljabar tensor. Namun demikian, karya Grassmann pada masanya kurang mendapat perhatian luas karena gaya penulisannya yang filosofis dan sulit dipahami oleh kalangan fisikawan pada zamannya (Katz & Parshall, 2022). Baru pada dekade-dekade berikutnya gagasan Grassmann mendapatkan pengakuan yang layak setelah dikaitkan dengan perkembangan aljabar linear modern dan aljabar multilinear.

Bentuk analisis vektor yang lebih mendekati notasi kontemporer diperkenalkan secara independen oleh Josiah Willard Gibbs di Amerika Serikat dan Oliver Heaviside di Inggris pada akhir abad ke-19. Keduanya menyederhanakan sistem *quaternion* Hamilton dengan memisahkan bagian skalar dan bagian vektor, sehingga menghasilkan sistem notasi produk titik dan produk silang yang jauh lebih praktis digunakan dalam perhitungan fisika, terutama dalam elektromagnetisme yang saat itu tengah dikembangkan oleh James Clerk Maxwell (Crowe, 2021). Gibbs menuliskan catatan kuliahnya yang kemudian disusun ulang oleh muridnya, Edwin Bidwell Wilson, menjadi buku *Vector Analysis* pada tahun 1901, yang menjadi rujukan standar notasi vektor modern hingga saat ini. Heaviside, di sisi lain, mengembangkan notasi serupa secara

independen dalam konteks penyederhanaan persamaan Maxwell, sehingga keempat belas persamaan asli Maxwell dapat diringkas menjadi empat persamaan vektor yang jauh lebih ringkas dan elegan.

Perkembangan analisis vektor pada abad ke-20 semakin diperkaya dengan formalisasi aljabar linear dan topologi, yang memungkinkan konsep vektor diperluas ke ruang berdimensi tak hingga, seperti ruang Hilbert dan ruang Banach, yang menjadi fondasi bagi analisis fungsional modern (Axler, 2024). Selain itu, kebutuhan mekanika kuantum dan relativitas umum turut mendorong lahirnya kalkulus tensor sebagai generalisasi lebih lanjut dari analisis vektor, di mana vektor dipandang sebagai kasus khusus tensor berorde satu. Albert Einstein sendiri memanfaatkan kalkulus tensor yang dikembangkan Gregorio Ricci-Curbastro dan Tullio Levi-Civita untuk merumuskan persamaan medan relativitas umum, yang menunjukkan bagaimana perluasan gagasan vektor mampu menjawab kebutuhan deskripsi ruang-waktu lengkung (Riley, Hobson, & Bence, 2022).

Memasuki abad ke-21, analisis vektor terus berkembang seiring kebutuhan komputasi numerik dan sains data. Representasi vektor kini tidak hanya digunakan untuk mendeskripsikan besaran fisis, tetapi juga untuk merepresentasikan data berdimensi tinggi dalam algoritma pembelajaran mesin, di mana setiap objek baik kata, gambar, maupun sinyal dipetakan ke dalam ruang vektor numerik agar dapat diproses secara aljabar (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023). Perkembangan ini menegaskan bahwa analisis vektor bukanlah cabang ilmu yang telah "selesai" secara historis, melainkan terus mengalami perluasan makna dan aplikasi seiring tuntutan zaman.

Tabel 1.1 Garis Waktu Perkembangan Analisis Vektor

Tahun	Tokoh	Kontribusi Utama
1843	William R. Hamilton	Penemuan sistem <i>quaternion</i> sebagai perluasan bilangan kompleks
1844	Hermann Grassmann	Pengembangan teori ruang berdimensi- <i>n</i> (<i>Ausdehnungslehre</i>)

1873	James C. Maxwell	Perumusan persamaan elektromagnetik yang mendorong kebutuhan notasi vektor
1881–1884	Josiah W. Gibbs	Penyederhanaan <i>quaternion</i> menjadi sistem produk titik dan silang
1892	Oliver Heaviside	Formulasi notasi vektor untuk teori elektromagnetik secara independen
1901	E. B. Wilson (dari catatan Gibbs)	Penerbitan buku <i>Vector Analysis</i> sebagai rujukan standar
1901–1920	Ricci-Curbastro & Levi-Civita	Pengembangan kalkulus tensor sebagai generalisasi vektor
1915	Albert Einstein	Penerapan kalkulus tensor pada relativitas umum
Abad ke-20 akhir – 21	Berbagai matematikawan dan ilmuwan komputasi	Perluasan menuju analisis fungsional, aljabar linear numerik, dan representasi vektor data

Sumber: Crowe (2021), Katz & Parshall (2022), dan Riley, Hobson, & Bence (2022)

Sebelum notasi vektor modern lahir di Eropa dan Amerika pada abad ke-19, gagasan mengenai representasi geometris besaran dan penyelesaian masalah ruang telah lama berkembang dalam tradisi matematika berbagai peradaban. Matematikawan pada masa keemasan Islam, seperti Al-Khawarizmi dan Omar Khayyam, mengembangkan metode geometris untuk menyelesaikan persamaan aljabar, termasuk penyelesaian persamaan kubik melalui perpotongan irisan kerucut, yang menunjukkan kesadaran awal terhadap keterkaitan antara aljabar dan representasi geometris jauh sebelum Descartes merumuskan geometri analitik pada abad ke-17 (Katz & Parshall, 2022). Warisan tradisi ini turut memengaruhi perkembangan geometri analitik di Eropa melalui jalur penerjemahan naskah-naskah Arab ke bahasa Latin pada abad pertengahan, yang pada gilirannya menjadi salah satu prasyarat historis

bagi lahirnya analisis vektor beberapa abad kemudian. Fakta historis ini penting ditegaskan agar pembaca memahami bahwa perkembangan analisis vektor bukan merupakan pencapaian yang berdiri sendiri dari tradisi Eropa semata, melainkan buah dari akumulasi pengetahuan matematika lintas peradaban selama berabad-abad.

Menariknya, sejarah perkembangan analisis vektor memperlihatkan pola yang berulang dalam sejarah matematika secara umum, yaitu ketegangan antara keindahan struktur abstrak dan tuntutan kepraktisan penggunaan. *Quaternion* Hamilton, meski secara struktural elegan dan kaya, akhirnya harus "mengalah" terhadap notasi Gibbs–Heaviside yang lebih sederhana dan mudah diterapkan pada masalah fisika sehari-hari. Pola serupa terulang kembali pada persaingan antara notasi vektor klasik dan notasi tensor atau aljabar geometris pada penerapan-penerapan yang lebih maju, sebagaimana diuraikan oleh Crowe (2021) dalam kajian historiografisnya yang menjadi salah satu rujukan definitif mengenai sejarah analisis vektor hingga saat ini. Pemahaman terhadap dinamika historis ini penting agar pembaca menyadari bahwa notasi dan metode yang dipelajari dalam buku ini bukanlah sesuatu yang *given* secara alamiah, melainkan hasil dari proses seleksi dan penyempurnaan panjang yang melibatkan banyak tokoh lintas generasi.

C. Peranan Analisis Vektor dalam Matematika dan Sains

Analisis vektor menempati posisi sentral dalam matematika karena berfungsi sebagai jembatan antara aljabar, geometri, dan kalkulus. Dalam aljabar linear, konsep vektor menjadi objek dasar yang dikaji melalui struktur ruang vektor, sementara dalam geometri analitik, vektor digunakan untuk merepresentasikan posisi, arah, dan hubungan antarobjek geometris secara aljabar (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Pada kalkulus multivariabel, analisis vektor memberikan kerangka kerja untuk mempelajari fungsi dengan banyak variabel bebas, termasuk turunan parsial, gradien, dan integral lipat, yang seluruhnya memiliki interpretasi vektor yang jelas dan bermakna secara geometris. Tanpa kerangka vektor, banyak konsep kalkulus multivariabel akan tampak sebagai kumpulan rumus terpisah yang sulit dipahami keterkaitannya.

Dalam bidang fisika, analisis vektor merupakan bahasa formal yang tidak tergantikan untuk merumuskan hukum-hukum alam. Hukum

kedua Newton, misalnya, dinyatakan dalam bentuk persamaan vektor $\vec{F} = m \vec{a}$ yang menegaskan bahwa gaya merupakan besaran vektor yang sebanding dengan percepatan, bukan sekadar besaran skalar yang hanya memiliki nilai. Demikian pula, keempat persamaan Maxwell yang mendasari teori elektromagnetik klasik dirumuskan sepenuhnya dalam bahasa operator vektor seperti divergensi dan *curl* (Griffiths & Inglefield, 2023). Tanpa analisis vektor, perumusan hukum-hukum fisika semacam ini akan menjadi jauh lebih rumit karena harus dituliskan secara terpisah untuk setiap komponen koordinat, sebagaimana yang sesungguhnya terjadi sebelum notasi vektor modern diperkenalkan pada akhir abad ke-19.

Peranan analisis vektor juga meluas ke berbagai bidang rekayasa dan sains terapan. Dalam mekanika fluida, medan kecepatan aliran fluida direpresentasikan sebagai medan vektor yang bergantung pada posisi dan waktu, sementara divergensi medan kecepatan mengindikasikan sumber atau tenggelamnya aliran pada suatu titik (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Dalam teknik sipil dan mekanika struktur, analisis gaya pada rangka batang dan struktur bangunan senantiasa memanfaatkan penguraian gaya menjadi komponen-komponen vektor pada arah sumbu koordinat tertentu, sehingga keseimbangan struktur dapat dianalisis secara sistematis (Hibbeler, 2022). Dalam ilmu komputer dan kecerdasan buatan, representasi data dalam bentuk vektor berdimensi tinggi menjadi dasar bagi algoritma pembelajaran mesin, termasuk teknik *embedding* yang memetakan objek kompleks seperti kata atau gambar ke dalam ruang vektor numerik (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023). Dengan demikian, analisis vektor tidak hanya relevan secara historis dalam fisika klasik, tetapi juga terus berkembang relevansinya dalam sains data kontemporer.

Peranan lain yang tidak kalah penting adalah kontribusi analisis vektor dalam bidang navigasi dan penginderaan jauh. Sistem penentuan posisi global (*global positioning system*) memanfaatkan perhitungan vektor posisi dan vektor kecepatan satelit untuk menentukan lokasi penerima sinyal di permukaan bumi dengan akurasi tinggi, sementara sistem robotika dan kendaraan otonom memanfaatkan medan vektor untuk perencanaan lintasan dan penghindaran rintangan (Chapra, 2023). Dalam ilmu meteorologi, medan vektor angin digunakan untuk memodelkan pola sirkulasi atmosfer dan memprediksi pergerakan sistem

cuaca, sedangkan dalam bidang kedokteran, teknik pencitraan seperti *diffusion tensor imaging* memanfaatkan generalisasi konsep vektor dan tensor untuk memetakan arah serat saraf pada otak manusia. Keragaman aplikasi ini menegaskan bahwa analisis vektor merupakan salah satu cabang matematika dengan daya jangkau aplikatif paling luas di antara cabang-cabang matematika lainnya.

Dalam konteks pendidikan matematika, penguasaan analisis vektor terbukti berkorelasi dengan kemampuan berpikir spasial dan penalaran geometris mahasiswa, sebab representasi vektor menuntut kemampuan untuk beralih secara luwes antara representasi aljabar (komponen numerik) dan representasi geometris (anak panah dalam ruang) (Suryadi & Turmudi, 2023). Kemampuan beralih representasi semacam ini dikenal dalam literatur pendidikan matematika sebagai *representational fluency*, yang dipandang sebagai salah satu indikator penting kedalaman pemahaman konseptual, bukan sekadar keterampilan prosedural semata. Oleh karena itu, pembelajaran analisis vektor yang efektif semestinya tidak hanya menekankan latihan soal hitung, tetapi juga secara sengaja melatih peralihan antar-representasi tersebut melalui visualisasi, diagram, dan penalaran geometris.

Tabel 1.2 Peranan Analisis Vektor pada Berbagai Bidang Keilmuan

Bidang	Contoh Penerapan	Konsep Vektor yang Digunakan
Fisika Mekanika	Analisis gaya, kecepatan, dan percepatan benda	Penjumlahan vektor, hukum kedua Newton
Elektromagnetika	Perumusan persamaan Maxwell	Divergensi, <i>curl</i> , medan vektor
Mekanika Fluida	Pemodelan medan kecepatan aliran	Medan vektor, divergensi, garis alir
Teknik Sipil	Analisis gaya pada struktur dan rangka batang	Komponen vektor, kesetimbangan gaya
Ilmu Komputer & AI	<i>Embedding</i> kata dan gambar, pembelajaran mesin	Ruang vektor berdimensi tinggi, produk titik

Navigasi & Geodesi	Penentuan posisi GPS, pemetaan lintasan	Vektor posisi, vektor kecepatan
Meteorologi	Pemodelan medan angin dan sirkulasi atmosfer	Medan vektor, garis alir

Sumber: Griffiths & Inglefield (2023), Kundu, Cohen, & Dowling (2022), dan Goodfellow, Bengio, & Courville (2023)

Peranan analisis vektor turut menjadi semakin krusial dalam konteks isu-isu kontemporer, misalnya dalam pengembangan energi terbarukan dan teknologi robotika. Pada bidang energi angin, penentuan posisi optimal turbin memerlukan analisis medan vektor kecepatan angin tiga dimensi guna memaksimalkan efisiensi konversi energi kinetik angin menjadi energi listrik, sementara pada bidang robotika, perencanaan lintasan gerak lengan robot industri memanfaatkan operasi vektor secara intensif untuk menghitung kinematika maju dan kinematika balik dari setiap sendi mekanis (Chapra, 2023). Demikian pula, dalam pengembangan kendaraan listrik dan sistem penyimpanan energi, medan vektor arus dan medan magnet dalam motor listrik dianalisis menggunakan prinsip-prinsip elektrodinamika berbasis vektor yang telah dirintis sejak era Maxwell hingga saat ini (Griffiths & Inglefield, 2023). Ilustrasi-ilustrasi kontemporer semacam ini menegaskan bahwa relevansi analisis vektor tidak semata terletak pada nilai historisnya, melainkan terus bertransformasi mengikuti kebutuhan teknologi mutakhir.

Studi Kasus 1.1 Analisis Vektor pada Sistem Penentuan Posisi Global (GPS)

Sistem penentuan posisi global bekerja dengan menghitung posisi penerima sinyal di permukaan bumi berdasarkan sinyal waktu yang dipancarkan oleh sedikitnya empat satelit yang mengorbit bumi. Setiap satelit memancarkan sinyal yang memuat informasi vektor posisinya sendiri pada saat pemancaran, dan penerima di bumi mengukur selisih waktu tempuh sinyal untuk menghitung jarak (skalar) terhadap masing-masing satelit. Namun, untuk menentukan posisi tiga dimensi penerima secara pasti, sistem

tersebut harus menyelesaikan sistem persamaan vektor yang melibatkan vektor posisi keempat satelit dan jarak yang terukur, sehingga posisi penerima diperoleh sebagai titik potong dari empat permukaan bola berpusat di masing-masing satelit. Proses triangulasi ini murni merupakan penerapan konsep vektor posisi dan panjang vektor yang dikombinasikan dengan metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linear secara iteratif (Chapra, 2023). Studi kasus ini menegaskan bahwa konsep vektor posisi yang tampak sederhana secara teoretis memiliki peran krusial dalam salah satu teknologi navigasi paling banyak digunakan di dunia saat ini.

D. Keterkaitan Analisis Vektor dengan Geometri Analitik dan Kalkulus Multivariabel

Geometri analitik, sebagaimana dirintis oleh René Descartes dan Pierre de Fermat pada abad ke-17, memungkinkan objek-objek geometris seperti titik, garis, dan bidang direpresentasikan secara aljabar melalui sistem koordinat. Analisis vektor memperkaya kerangka geometri analitik ini dengan menyediakan bahasa yang lebih ringkas dan bebas dari ketergantungan sistem koordinat tertentu, sehingga persamaan garis dan bidang dapat dituliskan dalam bentuk vektor yang berlaku universal, tidak peduli sistem koordinat apa yang dipilih untuk merepresentasikannya (Weir, Hass, & Giordano, 2021). Sebagai contoh, persamaan garis yang melalui sebuah titik dengan arah tertentu dapat dituliskan secara ringkas sebagai

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + t \vec{v}$$

suatu bentuk yang jauh lebih kompak dibandingkan representasi dalam bentuk persamaan simultan komponen-komponen koordinat.

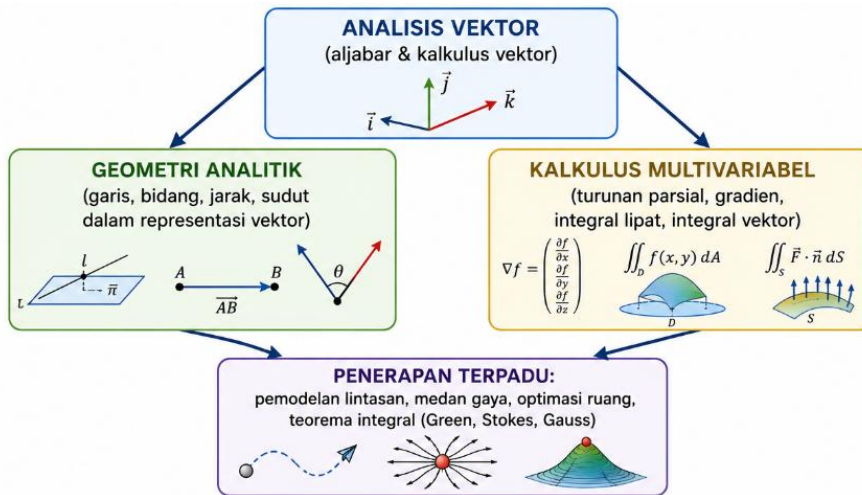
Keterkaitan antara analisis vektor dan geometri analitik semakin jelas ketika dikaji permasalahan jarak, sudut, dan kedudukan antarobjek geometris. Produk titik antara dua vektor memungkinkan penghitungan sudut antara dua garis atau dua bidang secara langsung, sementara produk silang memungkinkan penentuan vektor normal bidang serta penghitungan luas jajar genjang dan volume paralelepipedum tanpa harus menyelesaikan sistem persamaan simultan yang rumit (Anton,

Bivens, & Davis, 2022). Efisiensi komputasi dan konseptual semacam ini menjadi salah satu alasan mengapa geometri analitik ruang modern hampir selalu diajarkan bersamaan dengan aljabar vektor, alih-alih dipisahkan sebagaimana tradisi geometri analitik klasik yang lebih menekankan manipulasi persamaan koordinat.

Adapun kalkulus multivariabel dapat dipandang sebagai perluasan alami dari kalkulus satu variabel yang memanfaatkan kerangka vektor untuk menangani fungsi dengan banyak variabel bebas maupun fungsi bernilai vektor. Konsep turunan parsial, misalnya, merupakan generalisasi dari turunan biasa yang mengkaji laju perubahan fungsi terhadap satu variabel sementara variabel lainnya dianggap tetap, dan kumpulan seluruh turunan parsial suatu fungsi skalar membentuk vektor gradien yang menunjuk ke arah kenaikan fungsi paling tajam (Adams & Essex, 2022). Konsep gradien ini murni merupakan konsep vektor, sehingga tanpa penguasaan analisis vektor yang memadai, pemahaman terhadap optimasi fungsi multivariabel, termasuk metode pengali Lagrange, akan menjadi sangat terbatas.

Lebih jauh, integral lipat dan integral vektor dalam kalkulus multivariabel seperti integral garis, integral permukaan, serta teorema Green, Stokes, dan divergensi Gauss, seluruhnya dibangun di atas fondasi konsep vektor yang telah dipelajari pada tahap awal. Sebagai ilustrasi, teorema Stokes menghubungkan integral garis medan vektor di sepanjang kurva batas suatu permukaan dengan integral permukaan dari *curl* medan vektor tersebut, suatu hubungan yang hanya dapat dipahami secara utuh apabila pembaca telah menguasai operasi produk silang dan konsep medan vektor sejak awal (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Dengan demikian, penguasaan konsep dasar vektor pada bab-bab awal buku ini merupakan prasyarat mutlak bagi pemahaman topik-topik lanjutan yang akan dibahas pada bagian akhir buku.

Gambar 1.2 Keterkaitan Analisis Vektor, Geometri Analitik, dan Kalkulus Multivariabel



Analisis vektor berfungsi sebagai kerangka bahasa bersama yang menghubungkan geometri analitik, yang berfokus pada representasi objek ruang, dengan kalkulus multivariabel, yang berfokus pada perubahan dan akumulasi besaran pada ruang berdimensi banyak. Ketiga bidang ini bertemu dalam berbagai penerapan terpadu, termasuk pemodelan lintasan gerak dan teorema integral vektor (Weir, Hass, & Giordano, 2021; Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Keterkaitan ketiga bidang ini juga tampak dalam perkembangan kurikulum matematika perguruan tinggi kontemporer, yang cenderung mengintegrasikan pembahasan vektor, geometri analitik ruang, dan kalkulus multivariabel dalam satu rangkaian mata kuliah yang berkesinambungan, alih-alih memisahkannya sebagai mata kuliah yang berdiri sendiri-sendiri (Larson & Edwards, 2023). Pendekatan terintegrasi ini dipandang lebih efektif dalam membangun pemahaman mahasiswa karena memungkinkan transfer pengetahuan antar-topik terjadi secara alami, sebagaimana ditegaskan pula dalam berbagai kajian pendidikan matematika tinggi yang menyoroti pentingnya koherensi kurikulum bagi pembelajaran konsep-konsep matematika lanjut (Suryadi & Turmudi, 2023). Dengan kerangka pemikiran inilah buku referensi ini disusun, yakni menempatkan analisis vektor bukan sebagai topik yang berdiri sendiri, melainkan sebagai poros yang menghubungkan geometri analitik dan kalkulus multivariabel secara koheren.

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

20%

BAB II

KONSEP DASAR VEKTOR

Setelah memahami hakikat, sejarah, dan peranan analisis vektor pada bab sebelumnya, bab ini akan membahas secara terperinci konsep dasar vektor sebagai objek matematis. Pembahasan dimulai dari perbedaan mendasar antara besaran skalar dan besaran vektor, dilanjutkan dengan notasi dan representasi vektor, karakteristik vektor pada bidang dan ruang, hingga pembahasan mengenai panjang, arah, dan komponen vektor. Penguasaan konsep-konsep dasar ini bersifat fundamental karena seluruh operasi dan teori yang dibahas pada bab-bab selanjutnya dibangun di atas definisi dan notasi yang diperkenalkan pada bab ini (Colley, 2021).

Sebagaimana ditegaskan dalam berbagai literatur pendidikan matematika, kesalahpahaman konseptual pada tahap pengenalan vektor kerap menjadi sumber kesulitan mahasiswa dalam mempelajari topik-topik lanjutan, terutama ketika mahasiswa gagal membedakan secara tegas antara vektor sebagai objek geometris dan representasi numeriknya dalam bentuk komponen (Nicholson, 2021). Oleh karena itu, bab ini disusun dengan penekanan khusus pada pembangunan intuisi geometris terlebih dahulu, sebelum masuk ke representasi aljabar yang lebih formal, sehingga pembaca memperoleh pemahaman yang saling menguatkan antara kedua sudut pandang tersebut.

A. Besaran Skalar dan Besaran Vektor Tusi

Dalam fisika dan matematika terapan, besaran-besaran yang diukur dapat digolongkan menjadi dua kategori utama, yaitu besaran skalar dan besaran vektor. Besaran skalar (*scalar quantity*) adalah besaran yang sepenuhnya ditentukan oleh nilai numeriknya saja, tanpa memerlukan informasi arah, seperti massa, suhu, waktu, energi, dan

panjang (Halliday, Resnick, & Walker, 2021). Sebaliknya, besaran vektor (*vector quantity*) adalah besaran yang memerlukan dua informasi sekaligus untuk didefinisikan secara lengkap, yaitu besar (magnitudo) dan arah, seperti perpindahan, kecepatan, percepatan, gaya, dan momentum. Perbedaan mendasar ini memiliki konsekuensi matematis yang signifikan, sebab operasi aljabar yang berlaku pada besaran skalar tidak dapat begitu saja diterapkan pada besaran vektor tanpa memperhitungkan aspek arah.

Pembedaan antara besaran skalar dan vektor bukan sekadar persoalan klasifikasi, melainkan berkaitan erat dengan bagaimana besaran tersebut bertransformasi ketika sistem koordinat referensi diubah. Besaran skalar bersifat invarian terhadap rotasi sistem koordinat, artinya nilainya tidak berubah meskipun sistem koordinat yang digunakan untuk mengukurnya diputar atau digeser, sedangkan komponen besaran vektor akan berubah mengikuti aturan transformasi tertentu meskipun besaran vektor itu sendiri sebagai entitas geometris tetap sama (Kreyszig & Kreyszig, 2022). Sifat invariansi dan transformasi inilah yang menjadi kriteria matematis paling ketat untuk membedakan skalar sejati dari vektor sejati, yang membedakannya dari sekadar "pasangan bilangan" yang kebetulan memiliki dua atau tiga komponen.

Perlu pula dibedakan antara besaran vektor dengan besaran yang secara sepintas tampak memiliki "arah" namun sesungguhnya bukan vektor dalam pengertian matematis yang ketat. Sebagai contoh, rotasi berhingga (*finite rotation*) sering disalahpahami sebagai besaran vektor karena memiliki sumbu dan besar sudut tertentu, padahal komposisi dua rotasi berhingga tidak bersifat komutatif sebagaimana disyaratkan oleh penjumlahan vektor, sehingga rotasi berhingga secara ketat bukan merupakan besaran vektor sejati, berbeda dengan kecepatan sudut yang bersifat infinitesimal (Riley, Hobson, & Bence, 2022). Contoh semacam ini penting diperkenalkan sejak awal untuk melatih kejelian pembaca dalam mengidentifikasi karakteristik vektor secara tepat, bukan sekadar berdasarkan kesan intuitif semata.

Tabel 2.1 Perbandingan Karakteristik Besaran Skalar dan Besaran Vektor

Aspek	Besaran Skalar	Besaran Vektor
Informasi yang diperlukan	Hanya besar (magnitudo)	Besar dan arah
Contoh	Massa, suhu, waktu, energi, laju	Perpindahan, kecepatan, gaya, percepatan
Notasi umum	Huruf biasa, misalnya m , t	Huruf tebal atau bertanda panah, misalnya $\mathbf{v}$ atau $\vec{v}$
Operasi penjumlahan	Penjumlahan aljabar biasa	Penjumlahan mengikuti aturan jajargenjang/segitiga
Sifat terhadap rotasi koordinat	Invarian (tidak berubah)	Komponennya berubah mengikuti aturan transformasi tertentu
Representasi grafis	Tidak memerlukan representasi arah	Digambarkan sebagai anak panah berarah

Sumber: Halliday, Resnick, & Walker (2021) dan Kreyszig & Kreyszig (2022)

Pemahaman terhadap perbedaan skalar dan vektor juga penting dalam konteks besaran turunan yang lebih kompleks, seperti besaran tensor. Sebagian besaran fisis, misalnya tegangan (*stress*) pada suatu material atau tensor inersia suatu benda tegar, tidak dapat direpresentasikan secara memadai baik oleh skalar tunggal maupun vektor tunggal, melainkan memerlukan representasi tensor berorde dua yang menghubungkan dua arah sekaligus (Boas, 2021). Dalam kerangka ini, skalar dapat dipandang sebagai tensor berorde nol, vektor sebagai tensor berorde satu, sementara besaran seperti tegangan material merupakan tensor berorde dua. Pengenalan gagasan hierarki ini pada tahap awal bermanfaat untuk membuka wawasan pembaca bahwa vektor bukanlah titik akhir dari generalisasi besaran matematis, melainkan salah satu tahap dalam suatu hierarki konseptual yang lebih luas.

Studi Kasus 2.1 Representasi Vektor dan Tensor pada Pencitraan Medis (*Diffusion Tensor Imaging*)

Teknik pencitraan resonansi magnetik berbasis difusi (*diffusion tensor imaging*, DTI) memanfaatkan generalisasi konsep vektor untuk memetakan arah serat saraf pada otak manusia secara non-invasif. Pada setiap *voxel* (elemen volume) citra otak, pergerakan molekul air dalam jaringan saraf diukur pada berbagai arah, dan hasil pengukuran tersebut direpresentasikan sebagai tensor difusi, generalisasi vektor berorde lebih tinggi yang menggambarkan bagaimana difusi air bervariasi terhadap arah. Arah utama difusi, yang berkorelasi dengan orientasi serat saraf, diperoleh melalui dekomposisi tensor tersebut menjadi vektor-vektor eigen, dengan vektor eigen yang berkorespondensi pada nilai eigen terbesar menunjukkan arah dominan serat saraf pada voxel tersebut (Boas, 2021). Studi kasus ini menunjukkan bahwa perbedaan mendasar antara besaran skalar dan vektor, ketika diperluas ke konsep tensor, memiliki aplikasi klinis nyata dalam diagnosis kelainan struktur otak, termasuk deteksi dini kerusakan jaringan saraf akibat cedera atau penyakit neurodegeneratif.

B. Notasi dan Representasi Vektor

Notasi vektor telah mengalami evolusi panjang sejak diperkenalkannya sistem Gibbs–Heaviside pada akhir abad ke-19. Dalam literatur matematika dan fisika kontemporer, terdapat beberapa konvensi notasi yang umum digunakan untuk menyatakan suatu vektor, antara lain notasi huruf tebal (*bold*), misalnya $\mathbf{v}$, notasi huruf bertanda panah di atasnya, misalnya $\vec{v}$, serta notasi berupa pasangan atau tripel terurut yang dituliskan dalam kurung siku atau kurung biasa, misalnya (v_1, v_2, v_3) (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Ketiga notasi ini pada dasarnya merepresentasikan objek matematis yang identik, namun dipilih berdasarkan konteks penulisan; notasi huruf tebal umumnya digunakan pada naskah cetak, sedangkan notasi tanda panah lebih sering digunakan pada tulisan tangan karena lebih mudah dituliskan.

Selain notasi simbolik, vektor juga direpresentasikan secara komponen menggunakan basis vektor satuan standar. Pada ruang dua

dimensi, vektor satuan searah sumbu- x dan sumbu- y umumnya dilambangkan dengan $\vec{i}$ dan $\vec{j}$, sedangkan pada ruang tiga dimensi ditambahkan vektor satuan searah sumbu- z yang dilambangkan $\vec{k}$. Dengan demikian, suatu vektor $\vec{v}$ pada ruang tiga dimensi dapat dituliskan sebagai $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, yang ekuivalen dengan notasi komponen $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (Weir, Hass, & Giordano, 2021). Representasi menggunakan vektor satuan standar ini memiliki keunggulan karena secara eksplisit menunjukkan kontribusi masing-masing arah koordinat terhadap vektor secara keseluruhan, sehingga memudahkan interpretasi geometris di samping manipulasi aljabar.

Representasi lain yang penting dipahami adalah representasi vektor sebagai ruas garis berarah (*directed line segment*) yang menghubungkan dua titik dalam ruang, dituliskan sebagai $\vec{AB}$ untuk menyatakan vektor dari titik A menuju titik B . Representasi ini menekankan aspek geometris vektor sebagai perpindahan dari satu titik ke titik lain, berbeda dengan representasi vektor posisi (*position vector*) yang secara khusus menyatakan perpindahan dari titik asal (*origin*) menuju suatu titik tertentu (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Perbedaan antara vektor bebas (*free vector*), yang dapat digeser ke mana pun tanpa mengubah maknanya selama besar dan arahnya tetap sama, dengan vektor posisi, yang terikat pada titik asal tertentu, merupakan salah satu konsep penting yang sering luput dari perhatian pembelajar pemula namun memiliki konsekuensi signifikan dalam interpretasi geometris.

Tabel 2.2 Ragam Notasi Vektor dalam Literatur Matematika dan Fisika

Jenis Notasi	Contoh Penulisan	Konteks Penggunaan Umum
Huruf tebal (<i>bold</i>)	$\mathbf{v}, \mathbf{F}, \mathbf{a}$	Umum digunakan pada buku cetak, jurnal ilmiah, dan publikasi akademik untuk menyatakan besaran vektor.
Huruf bertanda panah	$\vec{v}, \vec{F}, \vec{a}$	Sering digunakan dalam tulisan tangan, catatan kuliah, papan tulis, dan presentasi untuk membedakan vektor dari besaran skalar.
Pasangan/tripel terurut	(v_1, v_2) (v_1, v_2, v_3)	Digunakan untuk merepresentasikan komponen-komponen vektor pada

		sistem koordinat dua dimensi maupun tiga dimensi, serta dalam pemrograman komputer.
Kombinasi vektor satuan	$v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$	Digunakan untuk menyatakan vektor sebagai kombinasi linear vektor satuan pada sistem koordinat Kartesius.
Ruas garis berarah	$\overrightarrow{AB}$	Digunakan dalam geometri untuk merepresentasikan vektor yang menunjukkan perpindahan atau arah dari titik A menuju titik B.

Sumber: Stewart, Clegg, & Watson (2021) dan Anton, Bivens, & Davis (2022)

Dalam praktik penulisan ilmiah kontemporer, pemilihan notasi vektor sebaiknya konsisten sepanjang naskah agar tidak menimbulkan ambiguitas, terutama ketika suatu naskah memuat besaran skalar dan vektor secara bersamaan. Sejumlah jurnal dan penerbit ilmiah internasional mensyaratkan penggunaan notasi huruf tebal untuk naskah cetak, sementara notasi tanda panah lebih ditoleransi pada materi ajar dan catatan perkuliahan (Bird, 2021). Buku referensi ini akan secara konsisten menggunakan notasi tanda panah, misalnya $\vec{v}$, $\vec{a}$, dan $\vec{F}$, untuk memudahkan pembaca membedakan besaran vektor dari besaran skalar di sepanjang teks, sembari tetap menampilkan notasi komponen dan notasi vektor satuan standar pada bagian-bagian yang relevan.

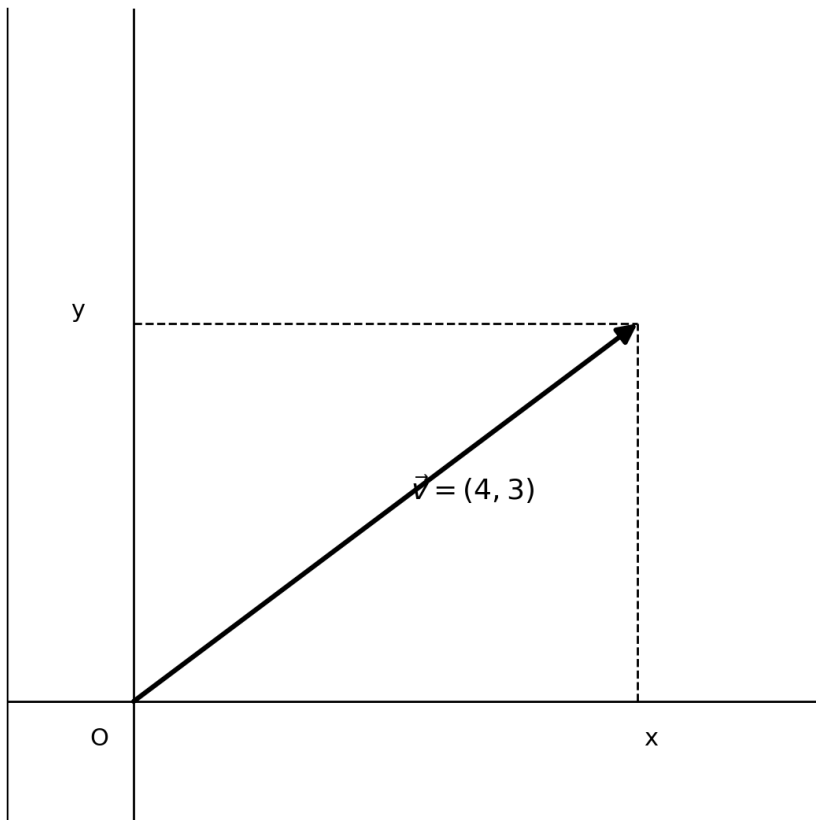
Perkembangan komputasi numerik turut memunculkan konvensi notasi vektor yang khas dalam konteks pemrograman. Pada berbagai bahasa dan pustaka pemrograman ilmiah, misalnya *NumPy* dalam bahasa Python atau *MATLAB*, vektor direpresentasikan sebagai larik (*array*) satu dimensi yang elemen-elemennya diakses melalui indeks numerik, tanpa notasi huruf tebal atau tanda panah sebagaimana pada naskah cetak (Chapra, 2023). Sebagai ilustrasi, vektor $\vec{v} = (3, -2, 5)$ dalam notasi matematis dituliskan dalam kode program sebagai larik `[3, -2, 5]`, dan operasi penjumlahan maupun perkalian skalar dapat dilakukan secara langsung terhadap larik tersebut menggunakan operator aritmetika bawaan pustaka komputasi. Kesadaran terhadap kesetaraan antara notasi matematis formal dan representasi komputasional semacam ini penting

bagi pembaca yang kelak akan menerapkan analisis vektor dalam konteks pemrograman ilmiah maupun rekayasa perangkat lunak.

C. Vektor pada Bidang dan Ruang

Vektor dapat didefinisikan pada berbagai ruang berdimensi berbeda, namun dalam konteks geometri analitik dan kalkulus multivariabel tingkat pengantar, pembahasan umumnya difokuskan pada dua kasus utama, yaitu vektor pada bidang (ruang berdimensi dua, dilambangkan $\mathbb{R}^2$) dan vektor pada ruang (ruang berdimensi tiga, dilambangkan $\mathbb{R}^3$). Pada bidang, suatu vektor $\vec{v}$ direpresentasikan oleh pasangan terurut (v_1, v_2) yang menyatakan komponen vektor pada arah sumbu- x dan sumbu- y , sedangkan pada ruang, vektor direpresentasikan oleh tripel terurut (v_1, v_2, v_3) yang menambahkan komponen pada arah sumbu- z (Larson & Edwards, 2023).

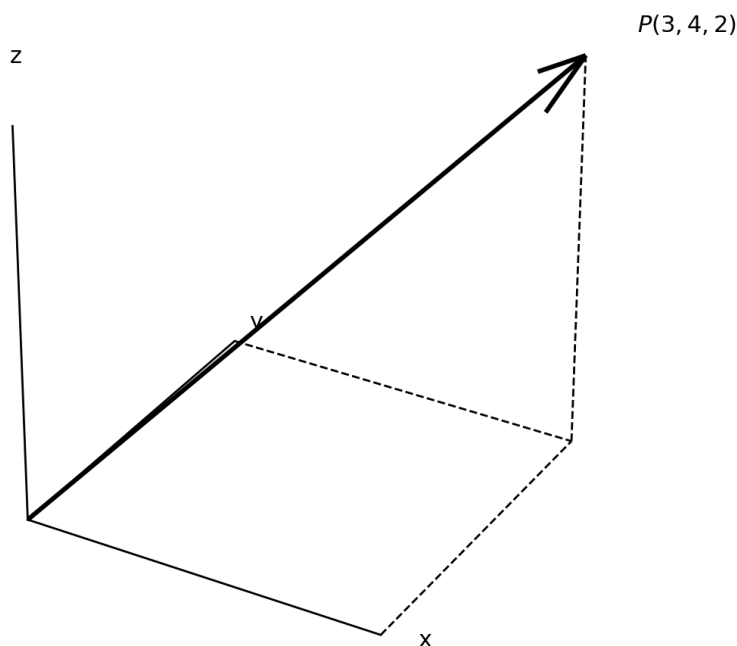
Gambar 2.1 Representasi Vektor Posisi pada Bidang Kartesius



Vektor posisi $\vec{v} = (4, 3)$ digambarkan sebagai ruas garis berarah dari titik asal O menuju titik $P(4, 3)$. Garis putus-putus menunjukkan proyeksi vektor pada masing-masing sumbu koordinat, yang selanjutnya menjadi komponen vektor tersebut. Representasi visual semacam ini menegaskan bahwa komponen vektor bukanlah sekadar pasangan bilangan, melainkan hasil proyeksi geometris pada sistem sumbu referensi tertentu (Weir, Hass, & Giordano, 2021).

Perluasan gagasan vektor dari bidang menuju ruang tiga dimensi memerlukan penambahan satu sumbu koordinat tegak lurus terhadap kedua sumbu sebelumnya, yang lazimnya mengikuti kaidah tangan kanan (*right-hand rule*) untuk menentukan orientasi positif sistem koordinat. Kaidah tangan kanan menyatakan bahwa apabila jari-jari tangan kanan digenggamkan dari arah sumbu- x positif menuju sumbu- y positif, maka ibu jari akan menunjuk ke arah sumbu- z positif (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Konvensi orientasi ini penting diperhatikan secara konsisten, sebab kesalahan orientasi sistem koordinat dapat menyebabkan kesalahan tanda pada perhitungan produk silang.

Gambar 2.2 Representasi Vektor pada Ruang Tiga Dimensi



Vektor posisi menuju titik $P(3, 4, 2)$ digambarkan dalam sistem koordinat Kartesius tiga dimensi yang mengikuti kaidah tangan kanan. Garis putus-putus menunjukkan proyeksi vektor pada bidang- xy serta

pada masing-masing sumbu koordinat, yang bersama-sama membentuk komponen vektor pada arah x , y , dan z . Visualisasi tiga dimensi semacam ini penting untuk melatih kemampuan berpikir spasial mahasiswa sebelum mempelajari sistem koordinat lengkung pada bab-bab berikutnya (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022).

Konsep vektor pada bidang dan ruang juga dapat diperluas lebih jauh ke ruang berdimensi- n , yang dilambangkan $\mathbb{R}^n$, di mana suatu vektor direpresentasikan oleh n -tupel terurut $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Meskipun visualisasi geometris langsung menjadi tidak mungkin untuk n lebih dari tiga, seluruh operasi aljabar dan sebagian besar sifat-sifat vektor pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ tetap berlaku secara analog pada $\mathbb{R}^n$, yang menjadi dasar bagi kajian ruang vektor abstrak pada bab-bab lanjutan buku ini (Axler, 2024). Generalisasi inilah yang menjadikan analisis vektor relevan dalam sains data modern, di mana suatu observasi dengan puluhan atau bahkan ribuan atribut dapat direpresentasikan sebagai satu titik atau vektor tunggal dalam ruang berdimensi tinggi.

Penting pula dipahami perbedaan antara ruang vektor Euklides yang dilengkapi konsep jarak dan sudut standar, dengan ruang vektor abstrak yang belum tentu dilengkapi struktur geometris semacam itu. Pada tahap pengantar ini, pembahasan dibatasi pada ruang vektor Euklides $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ yang dilengkapi struktur hasil kali dalam (*inner product*) standar, sehingga konsep panjang dan sudut dapat didefinisikan secara alami (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Pembatasan ini bersifat pedagogis, dimaksudkan agar pembaca membangun intuisi geometris yang kokoh terlebih dahulu sebelum memasuki kajian ruang vektor abstrak.

Selain sistem koordinat Kartesius yang telah dibahas, representasi vektor pada bidang dan ruang juga dapat dilakukan menggunakan sistem koordinat lengkung, seperti koordinat polar pada bidang, atau koordinat silinder dan koordinat bola pada ruang tiga dimensi. Pada sistem koordinat semacam ini, komponen vektor tidak lagi dinyatakan terhadap arah sumbu- x , y , dan z yang tetap, melainkan terhadap arah radial, tangensial, atau sudut yang bergantung pada posisi titik yang ditinjau (Kreyszig & Kreyszig, 2022). Pembahasan mendalam mengenai sistem koordinat lengkung, namun penting bagi pembaca untuk menyadari sejak tahap ini bahwa representasi komponen suatu vektor bukanlah sesuatu yang mutlak, melainkan senantiasa bergantung pada pilihan sistem koordinat dan basis vektor yang digunakan,

meskipun vektor itu sendiri sebagai entitas geometris tetap sama tanpa memandang sistem koordinat yang dipilih untuk merepresentasikannya.

D. Panjang, Arah, dan Komponen Vektor

Panjang atau magnitudo suatu vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ didefinisikan sebagai akar kuadrat dari jumlah kuadrat komponen-komponennya, dituliskan sebagai $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, yang secara geometris merupakan penerapan langsung teorema Pythagoras pada ruang tiga dimensi (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Definisi ini konsisten dengan definisi panjang pada ruang dua dimensi, yang merupakan kasus khusus ketika komponen ketiga bernilai nol. Panjang vektor senantiasa bernilai non-negatif, dan bernilai nol jika dan hanya jika vektor tersebut merupakan vektor nol, yaitu vektor yang seluruh komponennya bernilai nol dan tidak memiliki arah tertentu.

Arah suatu vektor tak-nol dapat dinyatakan melalui beberapa cara, salah satunya melalui sudut yang dibentuk vektor tersebut terhadap sumbu-sumbu koordinat, yang dikenal sebagai sudut arah (*direction angles*), atau melalui kosinus arah (*direction cosines*) yang menyatakan kosinus dari masing-masing sudut arah tersebut (Zill, 2021). Cara lain yang lebih sering digunakan dalam praktik adalah dengan menentukan vektor satuan (*unit vector*) yang searah dengan vektor tersebut, diperoleh dengan membagi vektor dengan panjangnya sendiri, dituliskan sebagai $\hat{u} = \vec{v}/|\vec{v}|$. Vektor satuan ini memiliki panjang tepat satu dan sepenuhnya merepresentasikan arah vektor asal tanpa membawa informasi mengenai besarnya, sehingga sangat berguna ketika suatu perhitungan hanya memerlukan informasi arah semata, misalnya dalam menentukan arah gaya normal pada suatu permukaan.

Komponen vektor merupakan proyeksi vektor tersebut pada masing-masing arah sumbu koordinat, dan secara umum dapat pula dipandang sebagai proyeksi pada sebarang arah vektor satuan tertentu, tidak terbatas pada arah sumbu koordinat standar. Konsep komponen pada arah sebarang ini penting dipahami karena menjadi dasar bagi konsep proyeksi vektor yang akan dibahas lebih mendalam pada Bab IV mengenai produk vektor. Sebagai ilustrasi, komponen suatu vektor gaya pada arah bidang miring dapat dihitung dengan memproyeksikan vektor

gaya tersebut pada vektor satuan yang searah dengan bidang miring, alih-alih hanya pada arah sumbu- x dan sumbu- y standar (Hibbeler, 2022).

Tabel 2.3 Rumus Dasar Panjang, Arah, dan Komponen Vektor pada $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$

Besaran	Rumus pada $\mathbb{R}^2$	Rumus pada $\mathbb{R}^3$
Panjang vektor	$\ \mathbf{v} \ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	$\ \mathbf{v} \ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
Vektor satuan searah $\mathbf{v}$	$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{v_1}{\ \mathbf{v} \ }, \frac{v_2}{\ \mathbf{v} \ } \right)$	$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{v_1}{\ \mathbf{v} \ }, \frac{v_2}{\ \mathbf{v} \ }, \frac{v_3}{\ \mathbf{v} \ } \right)$
Sudut terhadap sumbu- x	$\theta = \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right) *$	-
Kosinus arah	-	$\cos \alpha = \frac{v_1}{\ \mathbf{v} \ }, \cos \beta = \frac{v_2}{\ \mathbf{v} \ }, \cos \gamma = \frac{v_3}{\ \mathbf{v} \ }$
Vektor nol	$(0, 0)$, panjang = 0, arah tidak terdefinisi	$(0, 0, 0)$, panjang = 0, arah tidak terdefinisi

Sumber: Stewart, Clegg, & Watson (2021) dan Zill (2021)

Sebagai ilustrasi numerik, tinjau vektor $\mathbf{v} = (3, -4)$ pada bidang. Panjang vektor tersebut dihitung menggunakan rumus norma Euclidean sebagai berikut:

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Vektor satuan yang searah dengan $\mathbf{v}$ diperoleh dengan membagi setiap komponen vektor dengan panjangnya, yaitu:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}}{\| \mathbf{v} \|} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) = (0.6, -0.8)$$

Kebenaran hasil tersebut dapat diverifikasi dengan menghitung panjang vektor satuan:

$$\| \hat{\mathbf{u}} \| = \sqrt{0.6^2 + (-0.8)^2} = \sqrt{0.36 + 0.64} = \sqrt{1} = 1$$

Sudut yang dibentuk vektor terhadap sumbu- x positif dihitung menggunakan fungsi invers tangen:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-4}{3} \right)$$

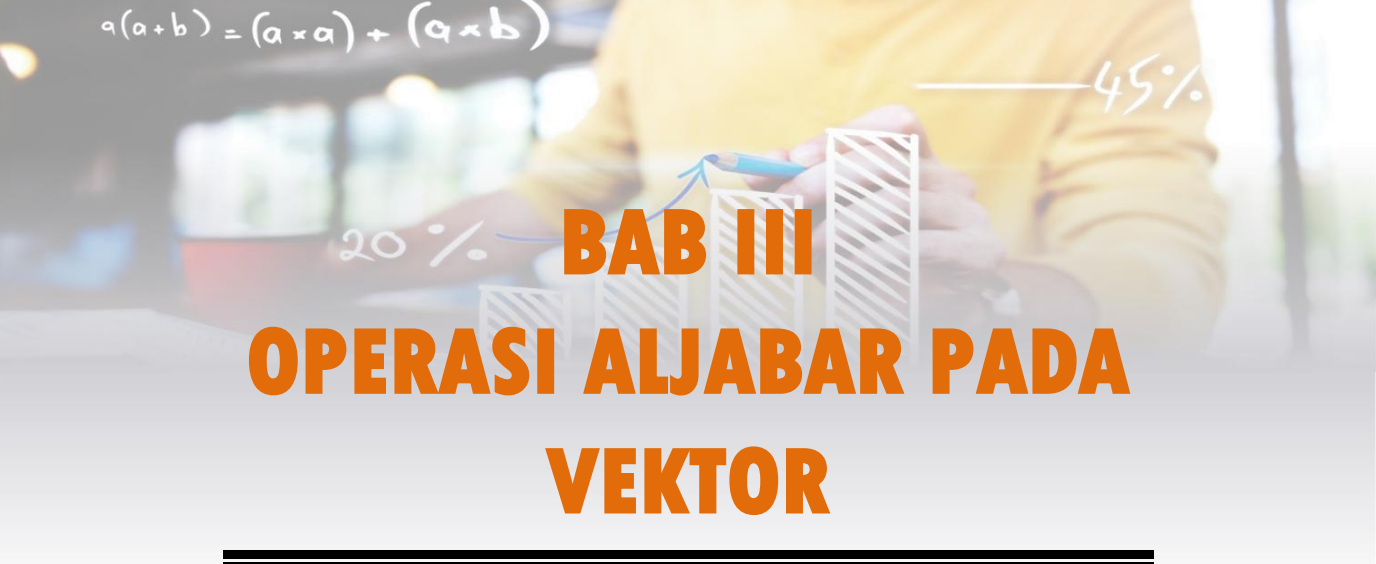
Karena vektor $v = (3, -4)$ berada pada Kuadran IV, interpretasi sudut harus memperhatikan letak kuadran agar hasil sesuai dengan posisi geometris vektor. Dalam praktik komputasi, penentuan sudut umumnya dilakukan menggunakan fungsi **atan2**(y, x), yang secara otomatis memperhitungkan kuadran sehingga menghasilkan nilai sudut yang benar (Chapra, 2023).

Pemahaman mendalam mengenai panjang, arah, dan komponen vektor menjadi prasyarat penting bagi pembahasan operasi aljabar vektor, sebab seluruh operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dengan skalar pada dasarnya adalah manipulasi terhadap komponen-komponen vektor yang telah diperkenalkan pada bagian ini. Selain itu, konsep panjang vektor sebagai fungsi norma (*norm*) juga menjadi jembatan menuju kajian ruang vektor bernorma (*normed vector space*) yang lebih abstrak (Axler, 2024).

Studi Kasus 2.2 Vektor Kosinus Arah dalam Penentuan Orientasi Antena Satelit

Dalam telekomunikasi satelit, antena penerima di permukaan bumi harus diarahkan secara presisi menuju satelit yang mengorbit pada posisi tertentu agar dapat menerima sinyal dengan kualitas optimal. Penentuan arah antena tersebut memanfaatkan konsep kosinus arah, di mana vektor yang menghubungkan posisi antena dengan posisi satelit dihitung terlebih dahulu, kemudian sudut elevasi dan sudut azimuth antena ditentukan dari kosinus arah vektor tersebut terhadap sistem koordinat referensi lokal (horizon dan arah utara geografis). Perhitungan ini harus memperhitungkan kelengkungan permukaan bumi serta pergerakan orbit satelit terhadap waktu, sehingga pada praktiknya melibatkan transformasi antara sistem koordinat geografis dan sistem koordinat Kartesius yang berpusat di bumi (Riley, Hobson, & Bence, 2022). Studi kasus ini menunjukkan bahwa konsep dasar berupa panjang dan arah vektor, menjadi fondasi bagi teknologi telekomunikasi satelit yang menopang komunikasi global, penyiaran televisi, dan akses internet di wilayah terpencil.

Pemahaman konsep dasar vektor mencakup perbedaan skalar dan vektor, penguasaan notasi, pemahaman representasi pada bidang dan ruang, serta penguasaan perhitungan panjang, arah, dan komponen merupakan fondasi yang tidak dapat ditawar dalam mempelajari analisis vektor secara menyeluruh.



BAB III

OPERASI ALJABAR PADA VEKTOR

Bab ini membahas operasi-operasi aljabar dasar yang berlaku pada vektor, yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar, kombinasi linear, serta sifat-sifat aljabar yang menyertai operasi-operasi tersebut. Operasi-operasi ini merupakan perluasan dari operasi aritmetika biasa yang telah dikenal pada bilangan real, namun dengan penyesuaian khusus yang memperhitungkan sifat keterarahan vektor (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Penguasaan operasi aljabar vektor secara kokoh menjadi prasyarat mutlak bagi pembahasan produk vektor, sistem koordinat, dan struktur ruang vektor.

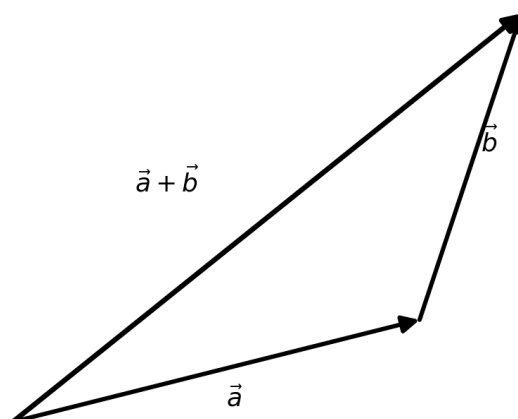
Berbeda dari operasi pada bilangan real yang bersifat satu dimensi, operasi aljabar vektor senantiasa memiliki interpretasi geometris yang eksplisit di samping interpretasi aljabarnya, sehingga pembahasan pada bab ini akan secara konsisten disajikan melalui dua sudut pandang tersebut, yaitu pendekatan geometris berbasis diagram dan pendekatan aljabar berbasis komponen. Kedua pendekatan ini saling melengkapi: pendekatan geometris memberikan intuisi visual mengenai makna suatu operasi, sedangkan pendekatan aljabar memberikan prosedur hitung yang presisi dan dapat digeneralisasi ke ruang berdimensi lebih tinggi (Colley, 2021).

A. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

Penjumlahan dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ secara geometris dapat dilakukan melalui dua metode yang ekuivalen, yaitu metode segitiga (*triangle rule*) dan metode jajar genjang (*parallelogram rule*). Pada metode segitiga, vektor $\vec{b}$ digambarkan mulai dari titik ujung vektor $\vec{a}$,

kemudian vektor jumlah $\vec{a} + \vec{b}$ digambarkan sebagai vektor yang menghubungkan titik pangkal $\vec{a}$ dengan titik ujung $\vec{b}$ (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Metode ini secara alami merepresentasikan gagasan perpindahan berurutan, misalnya seseorang yang berjalan sejauh vektor $\vec{a}$ kemudian dilanjutkan berjalan sejauh vektor $\vec{b}$, sehingga perpindahan totalnya adalah $\vec{a} + \vec{b}$.

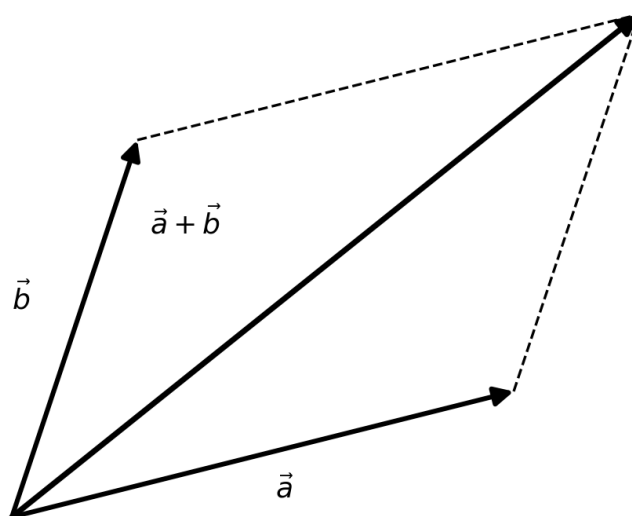
Gambar 3.1 Penjumlahan Vektor dengan Metode Segitiga



Vektor $\vec{b}$ digambarkan mulai dari titik ujung vektor $\vec{a}$, sehingga vektor jumlah $\vec{a} + \vec{b}$ merupakan vektor yang menghubungkan titik pangkal $\vec{a}$ dengan titik ujung $\vec{b}$. Metode ini secara intuitif menggambarkan perpindahan berurutan sepanjang dua vektor tersebut (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Metode jajar genjang menyajikan interpretasi geometris alternatif yang secara matematis ekuivalen dengan metode segitiga. Pada metode ini, kedua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ digambarkan dari titik pangkal yang sama, kemudian dibentuk jajar genjang dengan kedua vektor tersebut sebagai sisi-sisi yang berdekatan, sehingga vektor jumlah $\vec{a} + \vec{b}$ merupakan diagonal jajar genjang yang berpangkal pada titik pangkal bersama tersebut (Weir, Hass, & Giordano, 2021). Metode jajar genjang ini lebih sering digunakan dalam konteks fisika, khususnya ketika menjumlahkan dua gaya yang bekerja pada satu titik yang sama, sebab kedua gaya tersebut secara alami berpangkal pada titik kerja yang identik.

Gambar 3.2 Penjumlahan Vektor dengan Metode Jajar Genjang



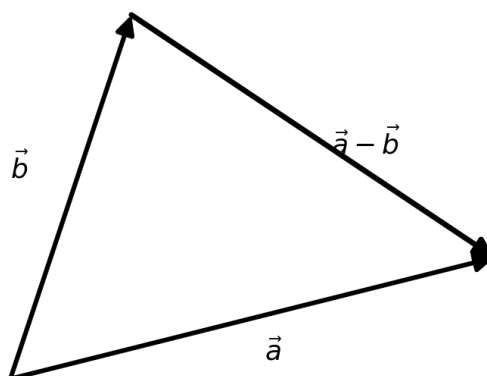
Kedua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ digambarkan dari titik pangkal yang sama, membentuk sisi-sisi jajar genjang yang berdekatan. Vektor jumlah $\vec{a} + \vec{b}$ merupakan diagonal jajar genjang yang ditarik dari titik pangkal bersama tersebut. Garis putus-putus menunjukkan sisi-sisi jajar genjang yang melengkapi konstruksi geometris ini (Weir, Hass, & Giordano, 2021).

Secara aljabar, penjumlahan vektor dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian, sehingga apabila $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Definisi komponen ini dapat dibuktikan konsisten dengan definisi geometris melalui argumen kesebangunan segitiga, sehingga kedua pendekatan geometris dan aljabar senantiasa menghasilkan vektor jumlah yang identik. Konsistensi antara pendekatan geometris dan aljabar semacam ini merupakan salah satu keindahan konseptual analisis vektor yang penting ditekankan kepada pembelajar pemula, sebab hal ini menegaskan bahwa representasi aljabar bukanlah sekadar notasi sembarang, melainkan representasi yang secara ketat mencerminkan makna geometrisnya.

Pengurangan vektor $\vec{a} - \vec{b}$ didefinisikan sebagai penjumlahan vektor $\vec{a}$ dengan vektor negatif $\vec{b}$, yaitu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, di mana vektor negatif $-\vec{b}$ memiliki panjang yang sama dengan $\vec{b}$ namun arah yang berlawanan (Colley, 2021). Secara geometris, apabila vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ digambarkan dari titik pangkal yang sama, maka vektor selisih $\vec{a} - \vec{b}$

dapat digambarkan sebagai vektor yang menghubungkan titik ujung $\vec{b}$ menuju titik ujung $\vec{a}$, yang merupakan diagonal kedua dari jajar genjang yang dibentuk oleh $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

Gambar 3.3 Pengurangan Vektor



Vektor selisih $\vec{a} - \vec{b}$ digambarkan sebagai vektor yang menghubungkan titik ujung $\vec{b}$ menuju titik ujung $\vec{a}$, ketika kedua vektor digambarkan dari titik pangkal yang sama. Perhatikan bahwa arah vektor selisih menunjuk dari pengurang menuju yang dikurangi, suatu detail yang sering menjadi sumber kesalahan pembelajar pemula (Colley, 2021).

Secara aljabar, pengurangan vektor dilakukan dengan mengurangkan komponen-komponen yang bersesuaian, sehingga $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$. Pengurangan vektor memiliki makna fisis penting, misalnya dalam menentukan vektor perpindahan relatif antara dua posisi atau dalam menentukan vektor kecepatan relatif antara dua benda yang bergerak. Sebagai ilustrasi, apabila $\vec{r}_1$ dan $\vec{r}_2$ masing-masing menyatakan vektor posisi dua benda pada suatu saat, maka vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ menyatakan posisi relatif benda kedua terhadap benda pertama, suatu besaran yang sangat penting dalam analisis tumbukan dan interaksi antarbenda (Halliday, Resnick, & Walker, 2021).

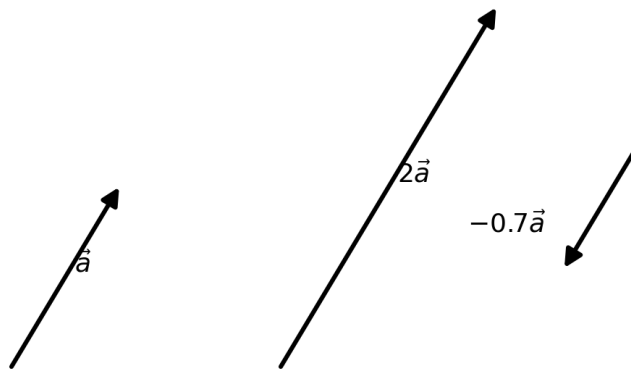
Sebagai ilustrasi numerik, tinjau vektor $\vec{a} = (5, 2)$ dan $\vec{b} = (1, 4)$. Vektor jumlah keduanya adalah $\vec{a} + \vec{b} = (5+1, 2+4) = (6, 6)$, sedangkan vektor selisihnya adalah $\vec{a} - \vec{b} = (5-1, 2-4) = (4, -2)$. Kedua hasil ini dapat diverifikasi secara geometris menggunakan metode segitiga atau jajar genjang, dan pembaca dianjurkan untuk secara aktif menggambar kedua vektor tersebut pada kertas berpetak sebagai latihan

mandiri guna memperkuat intuisi geometris terhadap hasil perhitungan aljabar yang telah diperoleh.

B. Perkalian Vektor dengan Skalar

Perkalian vektor dengan skalar (*scalar multiplication*) adalah operasi yang menghasilkan vektor baru dengan mengalikan setiap komponen vektor asal dengan suatu bilangan skalar k , dituliskan sebagai $k \vec{v} = (k v_1, k v_2, k v_3)$ (Zill, 2021). Secara geometris, perkalian dengan skalar mengubah panjang vektor sebanding dengan nilai mutlak skalar tersebut, sementara arah vektor tetap sama apabila skalar bernilai positif, atau berbalik arah tepat 180 derajat apabila skalar bernilai negatif. Apabila skalar k bernilai nol, hasil perkaliannya adalah vektor nol, yang tidak memiliki arah tertentu.

Gambar 3.4 Perkalian Vektor dengan Skalar



Vektor $\vec{a}$ dikalikan dengan skalar positif lebih besar dari satu menghasilkan vektor $2\vec{a}$ yang searah namun lebih panjang, sedangkan perkalian dengan skalar negatif seperti $-0.7\vec{a}$ menghasilkan vektor yang berlawanan arah dan lebih pendek. Ilustrasi ini menegaskan bahwa perkalian skalar hanya memengaruhi panjang dan orientasi arah (searah atau berlawanan arah), tanpa mengubah garis kerja (*line of action*) vektor asal (Zill, 2021).

Perkalian dengan skalar memiliki interpretasi fisis yang beragam bergantung konteks penerapannya. Dalam mekanika, hukum kedua Newton $\vec{F} = m \vec{a}$ pada dasarnya merupakan perkalian skalar antara massa m dan vektor percepatan $\vec{a}$, yang menghasilkan vektor gaya $\vec{F}$.

yang searah dengan percepatan karena massa selalu bernilai positif (Halliday, Resnick, & Walker, 2021). Sebaliknya, dalam elektrostatika, gaya yang dialami muatan negatif dalam medan listrik $\vec{E}$ dituliskan sebagai $\vec{F} = q\vec{E}$ dengan q bernilai negatif, sehingga vektor gaya yang dihasilkan berlawanan arah dengan medan listrik tersebut, suatu konsekuensi langsung dari sifat perkalian skalar negatif.

Kasus khusus yang penting dalam perkalian skalar adalah ketika skalar k dipilih sedemikian rupa sehingga menghasilkan vektor satuan, yaitu ketika $k = 1/|\vec{v}|$, yang menghasilkan proses normalisasi vektor sebagaimana telah disinggung pada Bab II. Normalisasi vektor merupakan prosedur yang sangat sering digunakan dalam grafika komputer dan pemrograman fisika untuk memastikan suatu vektor arah memiliki panjang tepat satu, sehingga perhitungan pencahayaan, pantulan, dan transformasi geometris dapat dilakukan secara konsisten tanpa terpengaruh oleh perbedaan skala vektor asal (Chapra, 2023).

Studi Kasus 3.1 Penjumlahan Vektor Gaya dalam Analisis Rangka Batang Jembatan

Dalam rekayasa struktur, khususnya analisis rangka batang (*truss*) pada konstruksi jembatan, setiap titik simpul (*joint*) menopang beberapa batang yang masing-masing memberikan gaya aksial dengan arah tertentu. Untuk memastikan struktur berada dalam keadaan setimbang, insinyur harus menjumlahkan seluruh vektor gaya yang bekerja pada setiap titik simpul dan memastikan resultannya sama dengan vektor nol, sesuai prinsip kesetimbangan statis (Hibbeler, 2022). Proses ini secara langsung menerapkan metode penjumlahan vektor, di mana setiap gaya batang terlebih dahulu diuraikan menjadi komponen horizontal dan vertikal berdasarkan sudut kemiringan batang terhadap sumbu referensi, kemudian seluruh komponen pada arah yang sama dijumlahkan secara aljabar. Apabila hasil penjumlahan tidak sama dengan nol pada salah satu titik simpul, hal ini mengindikasikan bahwa struktur berpotensi mengalami pergeseran atau keruntuhan pada titik tersebut, sehingga diperlukan penambahan atau penguatan batang penopang. Studi kasus ini menegaskan bahwa penguasaan operasi

penjumlahan vektor menjadi keterampilan praktis sebagai dasar keselamatan struktur bangunan dan infrastruktur.

Perkalian skalar juga berperan penting dalam pemodelan hubungan linear antara dua besaran fisis yang berbanding lurus, misalnya hubungan antara gaya pegas dan perpindahan menurut hukum Hooke, yang dituliskan sebagai $\vec{F} = -k\vec{x}$, dengan k menyatakan konstanta pegas dan tanda negatif menunjukkan bahwa gaya pegas senantiasa berlawanan arah dengan perpindahan dari posisi setimbang (Halliday, Resnick, & Walker, 2021). Persamaan ini merupakan contoh lain penerapan perkalian skalar dengan koefisien negatif, serupa dengan konsep yang telah dibahas pada ilustrasi gaya elektrostatik sebelumnya, dan menegaskan bahwa pola matematis yang sama (perkalian vektor dengan skalar bertanda negatif menghasilkan vektor berlawanan arah) muncul berulang kali pada berbagai konteks fisis yang tampak berbeda secara permukaan namun memiliki struktur matematis yang identik.

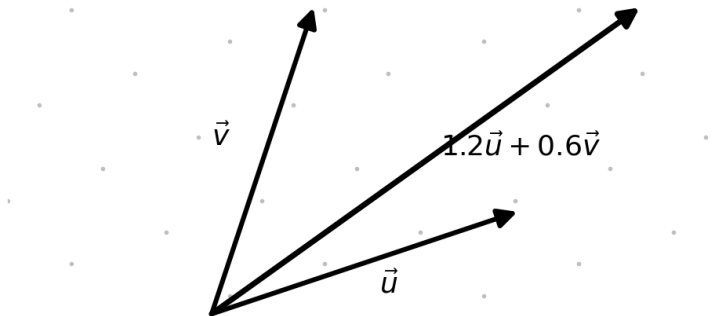
C. Kombinasi Linear Vektor

Kombinasi linear (*linear combination*) merupakan salah satu konsep paling fundamental dalam aljabar linear dan analisis vektor, didefinisikan sebagai penjumlahan sejumlah vektor yang masing-masing telah dikalikan dengan suatu skalar tertentu. Secara formal, apabila terdapat vektor-vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ dan skalar-skalar $c_1, c_2, \dots, c_n$, maka kombinasi linearnya dituliskan sebagai $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$ (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Konsep ini menggabungkan dua operasi yang telah dibahas sebelumnya, yaitu perkalian dengan skalar dan penjumlahan vektor, menjadi satu kerangka operasi tunggal yang jauh lebih fleksibel dan berdaya generalisasi tinggi.

Kombinasi linear dari dua vektor tak-sejajar pada bidang, misalnya $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, memiliki sifat istimewa yaitu mampu menghasilkan sembarang vektor lain pada bidang tersebut melalui pemilihan koefisien c_1 dan c_2 yang sesuai. Himpunan seluruh kombinasi linear yang mungkin dari sekumpulan vektor disebut sebagai bentangan (*span*) dari vektor-vektor tersebut, dan konsep bentangan ini menjadi fondasi bagi definisi basis dan dimensi ruang vektor yang akan dibahas secara mendalam pada Bab VI (Axler, 2024). Apabila dua vektor pada bidang tidak sejajar satu

sama lain, maka bentangan keduanya adalah seluruh bidang itu sendiri, sedangkan apabila kedua vektor tersebut sejajar, bentangannya hanya berupa satu garis lurus yang melalui titik asal.

Gambar 3.5 Kombinasi Linear dan Bentangan Dua Vektor pada Bidang



Titik-titik keabu-abuan menunjukkan berbagai hasil kombinasi linear $k\vec{u} + m\vec{v}$ untuk berbagai nilai k dan m , yang secara keseluruhan memenuhi seluruh bidang karena vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ tidak sejajar. Vektor tebal menunjukkan satu contoh kombinasi linear spesifik, yaitu $1.2\vec{u} + 0.6\vec{v}$. Diagram ini mengilustrasikan konsep bentangan (*span*) yang akan menjadi dasar definisi basis ruang vektor pada Bab VI (Axler, 2024).

Kombinasi linear memiliki aplikasi yang sangat luas, salah satunya dalam menyatakan suatu vektor gaya sebagai kombinasi dari komponen-komponen gaya pada arah tertentu, yang lazim dijumpai dalam analisis kesetimbangan struktur teknik sipil (Hibbeler, 2022). Dalam konteks komputer grafis, posisi suatu titik pada permukaan kurva Bezier dinyatakan sebagai kombinasi linear dari titik-titik kontrol dengan koefisien tertentu yang disebut fungsi basis Bernstein, yang menunjukkan bahwa gagasan kombinasi linear jauh melampaui konteks geometri Euklides sederhana dan meluas ke berbagai bidang komputasi modern. Dalam konteks pembelajaran mesin, representasi suatu vektor fitur sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis tertentu juga menjadi dasar bagi teknik reduksi dimensi seperti analisis komponen utama (*principal component analysis*), yang banyak digunakan dalam pemrosesan data berdimensi tinggi (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023).

Konsep kombinasi linear juga berkaitan erat dengan gagasan kebebasan linear (*linear independence*), yaitu suatu kondisi ketika tidak ada satu pun vektor dalam suatu himpunan yang dapat dinyatakan

sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya dalam himpunan tersebut. Meskipun pembahasan mendalam mengenai kebebasan linear akan disajikan pada Bab VI, pengenalan awal konsep ini pada bagian kombinasi linear penting dilakukan agar pembaca memahami bahwa tidak semua himpunan vektor memiliki "kontribusi unik" masing-masing terhadap suatu bentangan, sebab terdapat kemungkinan salah satu vektor sesungguhnya berlebih (*redundant*) karena dapat dibentuk dari kombinasi vektor-vektor lainnya (Nicholson, 2021).

Studi Kasus 3.2 Kombinasi Linear pada Analisis Komponen Utama (*Principal Component Analysis*)

Analisis komponen utama merupakan salah satu teknik reduksi dimensi yang paling banyak digunakan dalam sains data dan pembelajaran mesin, dengan gagasan inti berupa representasi data berdimensi tinggi sebagai kombinasi linear dari sejumlah kecil vektor basis baru yang disebut komponen utama. Teknik ini bekerja dengan mencari arah-arrah (vektor) pada ruang data yang memaksimalkan variansi data ketika diproyeksikan pada arah tersebut, sehingga sebagian besar informasi dalam data berdimensi tinggi dapat direpresentasikan secara memadai hanya menggunakan kombinasi linear dari beberapa komponen utama pertama, alih-alih seluruh dimensi asal data (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023). Sebagai ilustrasi, sebuah dataset gambar wajah berdimensi ribuan piksel dapat direpresentasikan secara efisien sebagai kombinasi linear dari beberapa puluh komponen utama yang disebut *eigenfaces*, tanpa kehilangan sebagian besar informasi visual penting. Studi kasus ini menunjukkan bahwa konsep kombinasi linear, meski tampak sederhana pada konteks vektor dua atau tiga dimensi, menjadi fondasi matematis bagi salah satu algoritma paling berpengaruh dalam pemrosesan data modern.

D. Sifat-Sifat Operasi Aljabar Vektor

Operasi penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar memenuhi sejumlah sifat aljabar (aksioma) yang secara formal mendefinisikan struktur ruang vektor. Meskipun pembuktian rigor

terhadap masing-masing sifat tersebut akan disajikan kemudian, penting bagi pembaca untuk mengenal sifat-sifat ini sejak tahap operasi aljabar dasar, sebab sifat-sifat inilah yang menjustifikasi berbagai manipulasi aljabar yang sering dilakukan secara intuitif tanpa disadari landasan formalnya (Lay, Lay, & McDonald, 2021).

Tabel 3.1 Sifat-Sifat Operasi Aljabar Vektor

Nama Sifat	Rumusan	Keterangan
Komutatif penjumlahan	$a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow} = b^{\rightarrow} + a^{\rightarrow}$	Urutan penjumlahan tidak memengaruhi hasil
Asosiatif penjumlahan	$(a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow}) + c^{\rightarrow} = a^{\rightarrow} + (b^{\rightarrow} + c^{\rightarrow})$	Pengelompokan penjumlahan tidak memengaruhi hasil
Identitas penjumlahan	$a^{\rightarrow} + 0^{\rightarrow} = a^{\rightarrow}$	Terdapat vektor nol sebagai elemen identitas
Invers penjumlahan	$a^{\rightarrow} + (-a^{\rightarrow}) = 0^{\rightarrow}$	Setiap vektor memiliki invers aditif
Distributif skalar terhadap penjumlahan vektor	$k(a^{\rightarrow} + b^{\rightarrow}) = ka^{\rightarrow} + kb^{\rightarrow}$	Perkalian skalar menyebar terhadap penjumlahan vektor
Distributif vektor terhadap penjumlahan skalar	$(k + m)a^{\rightarrow} = ka^{\rightarrow} + ma^{\rightarrow}$	Perkalian skalar menyebar terhadap penjumlahan skalar
Asosiatif perkalian skalar	$k(ma^{\rightarrow}) = (km)a^{\rightarrow}$	Pengelompokan perkalian skalar tidak memengaruhi hasil
Identitas perkalian skalar	$1 \cdot a^{\rightarrow} = a^{\rightarrow}$	Skalar satu tidak mengubah vektor

Sumber: Diolah dari Lay, Lay, & McDonald (2021) dan Axler (2024)

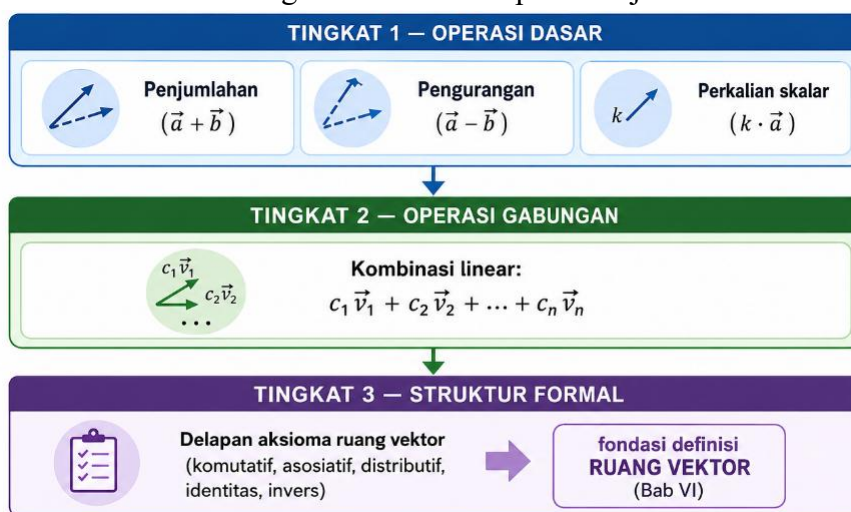
Kedelapan sifat pada tabel diatas secara formal dikenal sebagai aksioma ruang vektor, dan setiap himpunan objek matematis yang dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang memenuhi seluruh aksioma tersebut disebut sebagai ruang vektor, tidak peduli apakah objek tersebut berupa anak panah geometris, pasangan bilangan,

matriks, ataupun fungsi (Axler, 2024). Pemahaman terhadap sifat-sifat ini penting bukan hanya sebagai daftar rumus yang perlu dihafal, melainkan sebagai kerangka berpikir yang memungkinkan konsep vektor diperluas jauh melampaui representasi geometris konvensional. Sifat komutatif dan asosiatif penjumlahan, misalnya, menjamin bahwa penjumlahan sejumlah banyak vektor dapat dilakukan dalam urutan dan pengelompokan apa pun tanpa memengaruhi hasil akhirnya, suatu jaminan yang sangat berguna dalam perhitungan numerik yang melibatkan penjumlahan ribuan vektor sekaligus, misalnya dalam simulasi sistem partikel banyak (Chapra, 2023).

Perlu ditekankan bahwa tidak seluruh operasi yang tampak "alami" pada vektor senantiasa memenuhi sifat aljabar standar. Sebagai contoh, produk silang antara dua vektor tidak bersifat komutatif, melainkan bersifat antikomutatif, yaitu $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, yang berbeda signifikan dari sifat komutatif penjumlahan vektor yang telah dibahas pada bagian ini. Perbedaan semacam ini penting disadari sejak dini agar pembaca tidak secara keliru menggeneralisasi sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian skalar ke operasi-operasi vektor lain (Griffiths & Inglefield, 2023).

Menarik pula dicatat bahwa kedelapan aksioma tidak menuntut skalar pengali harus berupa bilangan real. Dalam aljabar linear yang lebih umum, skalar dapat pula diambil dari medan (*field*) matematis lain, misalnya bilangan kompleks, sehingga dikenal istilah ruang vektor kompleks yang banyak digunakan dalam mekanika kuantum, di mana keadaan suatu sistem kuantum direpresentasikan sebagai vektor pada ruang Hilbert kompleks (Axler, 2024). Bahkan pada bidang kriptografi dan teori pengkodean, dikenal pula ruang vektor atas medan berhingga (*finite field*), yang skalarnya hanya terdiri dari sejumlah berhingga elemen, misalnya medan biner yang hanya terdiri dari elemen 0 dan 1. Keragaman jenis skalar yang mungkin digunakan ini menunjukkan betapa luasnya generalisasi konsep ruang vektor, jauh melampaui vektor geometris berkomponen bilangan real yang menjadi fokus utama buku ini, sekaligus menegaskan mengapa kedelapan aksioma dirumuskan secara abstrak tanpa merujuk secara eksplisit pada jenis skalar tertentu.

Gambar 3.6 Ringkasan Hierarki Operasi Aljabar Vektor



Gambar ini merangkum alur logis pembahasan Bab III, dimulai dari operasi dasar penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar, yang kemudian digabungkan menjadi konsep kombinasi linear, hingga akhirnya sifat-sifat aljabar yang menyertainya diformalkan menjadi aksioma ruang vektor (Lay, Lay, & McDonald, 2021; Axler, 2024).

Operasi aljabar pada vektor penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar, dan kombinasi linear beserta sifat-sifat formal yang menyertainya membentuk fondasi aljabar yang akan terus digunakan secara konsisten pada seluruh bab selanjutnya. Bab IV akan melanjutkan pembahasan dengan memperkenalkan dua jenis produk vektor yang secara konseptual berbeda dari operasi-operasi yang telah dibahas pada bab ini, yaitu produk titik (*dot product*) dan produk silang (*cross product*), yang masing-masing menghasilkan besaran skalar dan besaran vektor baru dengan interpretasi geometris yang kaya, serta memiliki aplikasi luas dalam penghitungan sudut, proyeksi, luas, dan volume dalam geometri analitik ruang.



$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$

20% 45%

BAB IV

PRODUK VEKTOR DAN INTERPRETASI GEOMETRIS

Selain operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dengan skalar, terdapat dua jenis operasi perkalian antarvektor yang memiliki peranan sangat penting dalam analisis vektor, yaitu produk titik (*dot product*) dan produk silang (*cross product*). Kedua operasi ini berbeda secara fundamental dalam hal jenis hasil yang diperoleh: produk titik menghasilkan besaran skalar, sedangkan produk silang menghasilkan besaran vektor baru (Colley, 2021). Bab ini membahas kedua jenis produk tersebut secara mendalam, termasuk interpretasi geometrisnya, serta konsep proyeksi dan resolusi vektor yang banyak diterapkan dalam mekanika dan geometri analitik.

Kedua jenis produk vektor ini pada dasarnya menjawab dua pertanyaan geometris yang berbeda namun saling melengkapi mengenai hubungan antara dua vektor. Produk titik menjawab pertanyaan "seberapa searah kedua vektor tersebut?", sementara produk silang menjawab pertanyaan "bidang apa yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut, dan seberapa besar bidang itu?". Pemahaman terhadap perbedaan mendasar ini akan sangat membantu pembaca dalam memilih operasi yang tepat ketika dihadapkan pada suatu permasalahan geometris atau fisis tertentu, sebuah keterampilan yang akan terus diasah sepanjang bab ini melalui berbagai studi kasus dan contoh soal (Rahmawati & Suryadi, 2022).

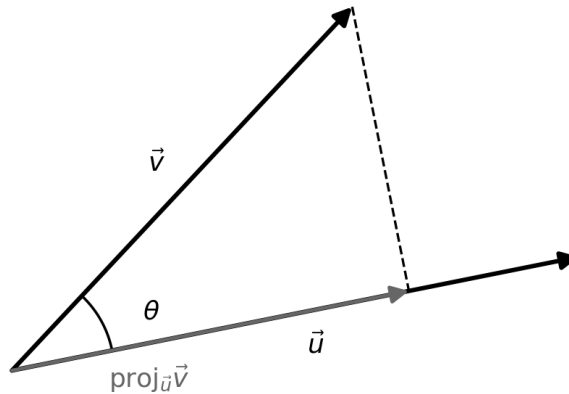
A. Produk Titik (*Dot Product*)

Produk titik (*dot product*), yang juga disebut produk skalar (*scalar product*), antara dua vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ didefinisikan secara aljabar sebagai $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, yaitu jumlah dari hasil kali komponen-komponen yang bersesuaian (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Hasil dari operasi ini selalu berupa bilangan real (skalar), bukan vektor, sehingga penamaan "produk skalar" mencerminkan sifat hasil operasinya. Definisi aljabar ini berlaku untuk vektor pada ruang berdimensi berapa pun, termasuk pada ruang dua dimensi maupun ruang berdimensi- n , berbeda dengan produk silang dan hanya terdefinisi secara alami pada ruang tiga dimensi.

Generalisasi produk titik ke ruang vektor abstrak dikenal sebagai hasil kali dalam (*inner product*), yang merupakan sembarang fungsi dua argumen vektor yang memenuhi sifat simetri, linearitas, dan definit positif, dengan produk titik pada $\mathbb{R}^n$ sebagai salah satu contoh konkretnya (Axler, 2024). Ruang vektor yang dilengkapi hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam (*inner product space*), dan generalisasi inilah yang memungkinkan konsep sudut dan ketegaklurusan yang pada mulanya tampak murni geometris diperluas ke ruang-ruang abstrak seperti ruang fungsi, di mana dua fungsi dapat dikatakan "ortogonal" satu sama lain meskipun keduanya bukan anak panah geometris, sebuah gagasan yang mendasari analisis Fourier dan berbagai teknik pemrosesan sinyal modern.

Secara geometris, produk titik memiliki hubungan erat dengan sudut antara dua vektor, dinyatakan melalui rumus $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$, dengan θ adalah sudut antara kedua vektor yang diukur dalam rentang 0° hingga 180° (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Rumus ini memberikan cara praktis untuk menentukan sudut antara dua vektor apabila komponen-komponennya diketahui, melalui $\cos \theta = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (|\vec{u}| |\vec{v}|)$. Interpretasi geometris ini menjadikan produk titik sebagai alat ukur kesejajaran arah dua vektor: nilai produk titik akan bernilai maksimum positif ketika kedua vektor searah, bernilai nol ketika kedua vektor saling tegak lurus, dan bernilai maksimum negatif ketika kedua vektor berlawanan arah.

Gambar 4.1 Sudut dan Proyeksi pada Produk Titik



Sudut θ antara vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ menentukan tanda dan besar produk titik keduanya. Garis putus-putus menunjukkan proyeksi $\vec{v}$ pada garis kerja $\vec{u}$, yang secara panjang berkaitan langsung dengan nilai produk titik melalui rumus $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$. Vektor abu-abu menunjukkan hasil proyeksi tersebut (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Salah satu penerapan penting produk titik adalah sebagai kriteria ketegaklurusan (*orthogonality*) antara dua vektor. Dua vektor tak nol $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dikatakan saling tegak lurus atau ortogonal jika dan hanya jika $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, karena hal ini mengimplikasikan $\cos \theta = 0$, yang berarti $\theta = 90^\circ$ (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Kriteria ini banyak dimanfaatkan dalam geometri analitik untuk memeriksa ketegaklurusan garis dan bidang, serta dalam fisika untuk menganalisis komponen gaya yang tidak melakukan usaha karena tegak lurus terhadap arah perpindahan.

Studi Kasus 4.1 Produk Titik dalam Perhitungan Iradiansi Panel Surya

Efisiensi panel surya dalam menyerap energi matahari sangat bergantung pada sudut datang sinar matahari relatif terhadap permukaan panel, suatu hubungan yang secara langsung dimodelkan menggunakan produk titik. Iradiansi efektif yang diterima permukaan panel dihitung sebagai $I_{eff} = I_0 (\hat{n} \cdot \hat{s})$, dengan I_0 menyatakan intensitas radiasi matahari, $\hat{n}$ adalah vektor normal satuan permukaan panel, dan $\hat{s}$ adalah vektor satuan arah datang sinar matahari (Halliday, Resnick, & Walker, 2021). Ketika kedua

vektor satuan tersebut sejajar (matahari tegak lurus terhadap panel), produk titiknya bernilai satu dan irradiansi mencapai maksimum, sedangkan ketika sudut datang semakin miring, nilai produk titik berkurang mengikuti kosinus sudut tersebut, sehingga energi yang terserap juga berkurang. Prinsip inilah yang mendasari sistem pelacak matahari (*solar tracker*) pada instalasi panel surya modern, yang secara otomatis menyesuaikan orientasi panel sepanjang hari agar vektor normal panel tetap sedekat mungkin sejajar dengan arah datang sinar matahari, memaksimalkan nilai produk titik dan dengan demikian memaksimalkan energi yang terserap.

Produk titik juga memenuhi sejumlah sifat aljabar penting yang analog dengan sifat perkalian bilangan real, yaitu sifat komutatif $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, sifat distributif terhadap penjumlahan vektor $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, serta kompatibilitas dengan perkalian skalar $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Selain itu, produk titik suatu vektor dengan dirinya sendiri menghasilkan kuadrat panjang vektor tersebut, yaitu $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$, sebuah hubungan yang sering dimanfaatkan sebagai definisi alternatif bagi panjang vektor dalam kerangka ruang hasil kali dalam (*inner product space*). Hubungan ini juga menegaskan mengapa produk titik dapat dipandang sebagai generalisasi dari konsep panjang vektor, sebab menghitung panjang suatu vektor pada dasarnya adalah kasus khusus perhitungan produk titik vektor tersebut dengan dirinya sendiri, diikuti dengan penarikan akar kuadrat.

Contoh

Diketahui $\vec{u} = (3, -2, 1)$ dan $\vec{v} = (1, 4, -2)$. Tentukan $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dan sudut antara kedua vektor tersebut.

Pembahasan:

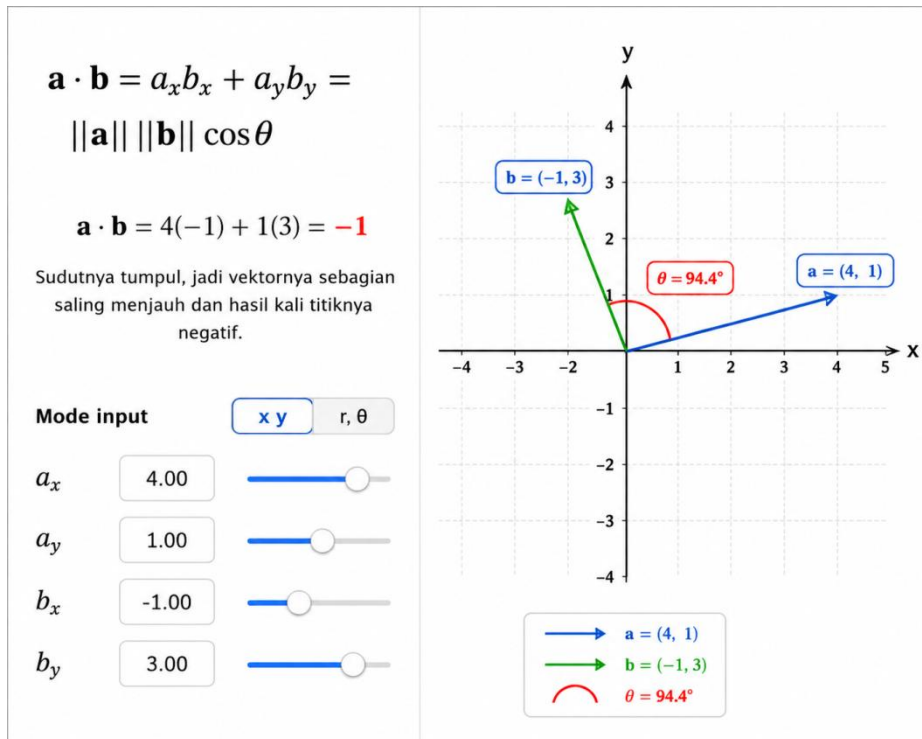
Produk titik kedua vektor dihitung dengan mengalikan komponen-komponen yang bersesuaian, kemudian menjumlahkan hasilnya.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3)(1) + (-2)(4) + (1)(-2) = 3 - 8 - 2 = -7$$

Selanjutnya, hitung panjang masing-masing vektor.

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{(9+4+1)} = \sqrt{14} \text{ dan } \| \mathbf{v} \| = \sqrt{(1+16+4)} = \sqrt{21}$$

Hubungan antara produk titik dan sudut kedua vektor diberikan oleh



maka

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{-7}{\sqrt{14} \times \sqrt{21}} = \frac{-7}{\sqrt{294}} \approx -0.408$$

sehingga $\theta = \arccos(-0.408) \approx 114.1^\circ$. Nilai sudut yang lebih dari 90° konsisten dengan produk titik yang bernilai negatif, menunjukkan bahwa kedua vektor cenderung berlawanan arah.

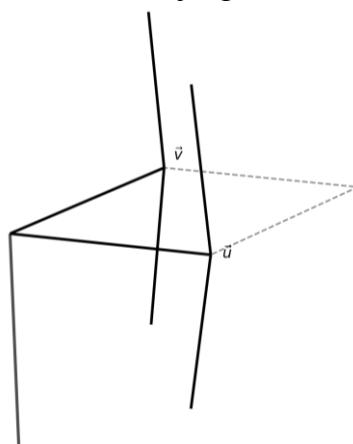
B. Produk Silang (Cross Product)

Produk silang (*cross product*) antara dua vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pada ruang tiga dimensi didefinisikan sebagai vektor baru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ yang komponen-komponennya dapat dihitung melalui determinan matriks yang memuat vektor basis satuan pada baris pertama, komponen $\mathbf{u}$ pada baris kedua, dan komponen $\mathbf{v}$ pada baris ketiga (Larson & Edwards, 2022). Secara eksplisit, rumus komponennya adalah

$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Berbeda dengan produk titik, hasil dari produk silang berupa vektor, bukan skalar, dan operasi ini hanya terdefinisi secara alami pada ruang tiga dimensi, meskipun terdapat generalisasi terbatas ke ruang tujuh dimensi yang jarang dibahas pada tingkat pengantar.

Panjang vektor hasil produk silang memiliki interpretasi geometris yang penting, yaitu $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$, dengan θ adalah sudut antara kedua vektor. Nilai ini secara numerik sama dengan luas jajargenjang yang dibentuk oleh kedua vektor sebagai sisi-sisinya (Colley, 2021). Sifat ini menjadikan produk silang sebagai alat yang sangat berguna untuk menghitung luas jajargenjang maupun luas segitiga dalam ruang, di mana luas segitiga dapat dihitung sebagai setengah dari luas jajargenjang yang bersesuaian. Selain itu, dua vektor tak nol dikatakan sejajar jika dan hanya jika produk silangnya sama dengan vektor nol, karena hal ini mengimplikasikan $\sin \theta = 0$, yang berarti $\theta = 0^\circ$ atau $\theta = 180^\circ$.

Gambar 4.2 Produk Silang: Kaidah Tangan Kanan dan Luas Jajar Genjang



Vektor hasil $\vec{u} \times \vec{v}$ tegak lurus terhadap bidang yang dibentuk oleh $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, dengan arah mengikuti kaidah tangan kanan. Daerah jajargenjang yang dibentuk oleh $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ (ditunjukkan garis putus-putus) memiliki luas yang secara numerik sama dengan panjang vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ (Colley, 2021; Griffiths & Inglefield, 2023).

Arah vektor hasil produk silang $\vec{u} \times \vec{v}$ ditentukan melalui kaidah tangan kanan, yaitu tegak lurus terhadap bidang yang dibentuk oleh $\vec{u}$

dan $\vec{v}$, dengan arah mengikuti putaran jari tangan kanan dari $\vec{u}$ menuju $\vec{v}$ sehingga ibu jari menunjukkan arah vektor hasil (Griffiths & Inglefield, 2023). Perlu diperhatikan bahwa produk silang bersifat *antikomutatif* (*anticommutative*), yaitu $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, berbeda dengan produk titik yang bersifat komutatif. Sifat antikomutatif ini merupakan konsekuensi langsung dari definisi determinan, di mana pertukaran dua baris matriks mengubah tanda determinan.

Produk silang juga memenuhi sifat distributif terhadap penjumlahan vektor, yaitu $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$, serta kompatibilitas dengan perkalian skalar ($k\vec{u}$) $\times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$, namun tidak bersifat asosiatif secara umum, artinya $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ umumnya tidak sama dengan $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (Zill & Wright, 2022). Ketiadaan sifat asosiatif ini menjadi pembeda penting antara struktur aljabar yang dibentuk oleh produk silang dengan struktur aljabar biasa, dan menjadi salah satu alasan mengapa produk silang tergolong sebagai operasi dalam struktur aljabar Lie, bukan aljabar asosiatif standar seperti perkalian bilangan real atau perkalian matriks.

Penting dicatat bahwa konvensi kaidah tangan kanan bukanlah suatu keharusan matematis mutlak, melainkan konvensi yang disepakati secara luas dalam komunitas ilmiah untuk menjamin konsistensi. Terdapat pula sistem koordinat yang menganut kaidah tangan kiri (*left-handed coordinate system*), yang digunakan pada beberapa perangkat lunak grafika komputer tertentu, di mana arah produk silang akan terbalik dibandingkan konvensi tangan kanan yang dominan digunakan dalam matematika dan fisika (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Kesadaran terhadap perbedaan konvensi ini penting bagi pembaca yang kelak bekerja lintas disiplin, khususnya ketika mengintegrasikan perhitungan fisika dengan perangkat lunak rekayasa atau grafika komputer yang mungkin menganut konvensi berbeda, sebab kesalahan konversi konvensi tangan kanan-kiri dapat menghasilkan kesalahan tanda yang signifikan pada hasil akhir perhitungan.

Penting dicatat bahwa konvensi kaidah tangan kanan bukanlah suatu keharusan matematis mutlak, melainkan konvensi yang disepakati secara luas dalam komunitas ilmiah untuk menjamin konsistensi. Terdapat pula sistem koordinat yang menganut kaidah tangan kiri (*left-handed coordinate system*), yang digunakan pada beberapa perangkat lunak grafika komputer tertentu, di mana arah produk silang akan

terbalik dibandingkan konvensi tangan kanan yang dominan digunakan dalam matematika dan fisika (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Kesadaran terhadap perbedaan konvensi ini penting bagi pembaca yang kelak bekerja lintas disiplin, khususnya ketika mengintegrasikan perhitungan fisika dengan perangkat lunak rekayasa atau grafika komputer yang mungkin menganut konvensi berbeda, sebab kesalahan konversi konvensi tangan kanan-kiri dapat menghasilkan kesalahan tanda yang signifikan pada hasil akhir perhitungan.

Studi Kasus 4.2 Produk Silang dalam Perhitungan Torsi pada Kunci Pas

Torsi atau momen gaya, yang menentukan seberapa efektif suatu gaya dalam memutar benda terhadap suatu poros, didefinisikan sebagai produk silang $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, dengan $\vec{r}$ adalah vektor posisi dari poros putar menuju titik kerja gaya, dan $\vec{F}$ adalah vektor gaya yang diberikan (Hibbeler, 2022). Ketika menggunakan kunci pas untuk mengencangkan baut, seorang mekanik secara intuitif memahami bahwa gaya yang diberikan tegak lurus terhadap pegangan kunci menghasilkan torsi maksimum, sementara gaya yang diberikan sejajar dengan pegangan kunci tidak menghasilkan torsi sama sekali, suatu fenomena yang secara matematis dijelaskan langsung oleh rumus $|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin \theta$, yang bernilai maksimum ketika $\theta = 90^\circ$ dan bernilai nol ketika $\theta = 0^\circ$ atau 180° . Arah torsi yang dihasilkan, mengikuti kaidah tangan kanan, menentukan arah putaran baut, searah atau berlawanan arah jarum jam. Studi kasus ini menunjukkan bagaimana intuisi mekanik yang berpengalaman, tanpa perlu menuliskan rumus secara eksplisit, sesungguhnya mencerminkan pemahaman implisit terhadap sifat geometris produk silang.

Contoh

Diketahui $\vec{u} = (2, 1, -1)$ dan $\vec{v} = (1, -2, 3)$. Tentukan $\vec{u} \times \vec{v}$ dan luas jajargenjang yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut.

Pembahasan: Dengan rumus komponen, diperoleh

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= ((1)(3) - (-1)(-2), (-1)(1) - (2)(3), (2)(-2) - (1)(1)) \\ &= (3-2, -1-6, -4-1) \\ &= (1, -7, -5)\end{aligned}$$

Selanjutnya, panjang vektor hasil produk silang adalah

$$\begin{aligned}|\vec{u} \times \vec{v}| &= \sqrt{1+49+25} \\ &= \sqrt{75} \\ &= 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Hasil ini menegaskan bahwa produk silang secara efisien menggabungkan informasi arah normal bidang dan luas jajargenjang dalam satu operasi vektor.

Tabel 4.1 Perbandingan Produk Titik dan Produk Silang

Aspek	Produk Titik ($\vec{u} \cdot \vec{v}$)	Produk Silang ($\vec{u} \times \vec{v}$)
Jenis hasil	Skalar	Vektor
Rumus geometris	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$	$\ \vec{u} \times \vec{v}\ = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \sin \theta$
Sifat komutatif	Komutatif ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$)	Antikomutatif $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
Berlaku pada dimensi	Sembarang dimensi	Hanya $\mathbb{R}^3$ (secara alami)
Interpretasi geometris	Ketegaklurusan & proyeksi	Luas jajargenjang & vektor normal
Bernilai nol ketika	Kedua vektor saling tegak lurus ($\theta = 90^\circ$)	Kedua vektor sejajar atau antiparalel ($\theta = 0^\circ$ atau 180°)

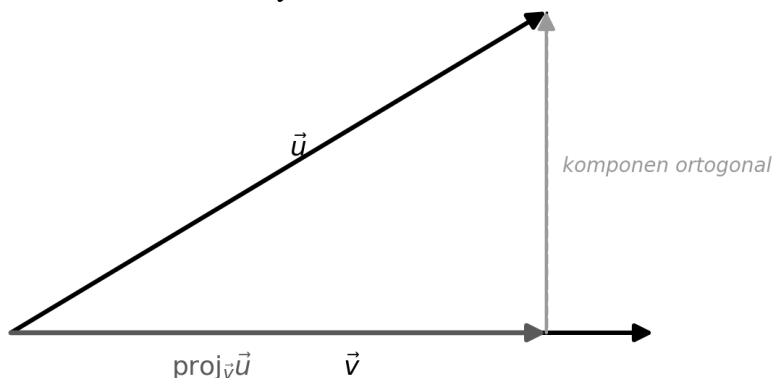
Sumber: Colley (2021) dan Larson & Edwards (2022)

C. Proyeksi dan Resolusi Vektor

Proyeksi skalar (*scalar projection*) suatu vektor $\vec{u}$ pada vektor $\vec{v}$ didefinisikan sebagai panjang bayangan $\vec{u}$ pada garis kerja $\vec{v}$, dihitung melalui rumus $\text{comp}_{\vec{v}} \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / |\vec{v}|$ (Hass, Heil, & Weir, 2022). Nilai ini dapat bernilai positif, negatif, atau nol, bergantung pada sudut antara kedua vektor: bernilai positif ketika sudutnya lancip, bernilai negatif ketika sudutnya tumpul, dan bernilai nol ketika kedua vektor saling tegak lurus. Proyeksi skalar banyak dimanfaatkan dalam fisika untuk menghitung usaha yang dilakukan oleh komponen gaya yang searah dengan perpindahan.

Berbeda dengan proyeksi skalar yang menghasilkan bilangan, *proyeksi vektor* (*vector projection*) menghasilkan vektor yang searah dengan $\vec{v}$ dan memiliki panjang sama dengan proyeksi skalar, dirumuskan sebagai $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = ((\vec{u} \cdot \vec{v}) / |\vec{v}|^2) \vec{v}$ (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Proyeksi vektor ini secara geometris merupakan komponen vektor $\vec{u}$ yang searah dengan $\vec{v}$, dan menjadi dasar bagi proses *resolusi vektor* (*vector resolution*), yaitu penguraian sebuah vektor menjadi dua komponen yang saling tegak lurus: satu komponen sejajar dengan arah acuan dan satu komponen tegak lurus terhadapnya.

Gambar 4.3 Proyeksi dan Resolusi Vektor



Vektor $\vec{u}$ diuraikan menjadi dua komponen: $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$, yang sejajar dengan $\vec{v}$, dan komponen ortogonal, yang tegak lurus terhadap $\vec{v}$. Penjumlahan kedua komponen tersebut mengembalikan vektor $\vec{u}$ semula, sesuai persamaan $\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + (\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u})$ (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Resolusi vektor menjadi komponen sejajar dan tegak lurus dinyatakan melalui $\vec{u} = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + (\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u})$, dengan komponen pertama sejajar $\vec{v}$ dan komponen kedua, yang disebut *komponen ortogonal* (*orthogonal component*), tegak lurus terhadap $\vec{v}$ (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Dapat dibuktikan bahwa $(\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$, yang mengonfirmasi ketegaklurusan komponen ortogonal terhadap $\vec{v}$. Teknik resolusi vektor ini menjadi sangat penting dalam mekanika teknik, khususnya untuk menguraikan gaya-gaya miring menjadi komponen horizontal dan vertikal, atau komponen sejajar dan tegak lurus terhadap suatu bidang miring.

Proses resolusi vektor juga dapat diperluas menjadi resolusi terhadap lebih dari satu arah acuan sekaligus, misalnya menguraikan suatu vektor tiga dimensi menjadi tiga komponen yang masing-masing sejajar dengan tiga vektor basis ortogonal, sebagaimana telah dibahas secara implisit pada representasi komponen Kartesius di Bab II. Dengan demikian, representasi komponen $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ yang telah dikenal sejak awal buku ini sesungguhnya dapat dipahami sebagai kasus khusus dari proses resolusi vektor yang lebih umum, di mana arah acuan yang digunakan adalah ketiga vektor basis standar $\vec{i}, \vec{j}$, dan $\vec{k}$ yang saling tegak lurus (Hass, Heil, & Weir, 2022). Pemahaman ini menyatukan konsep proyeksi dan resolusi vektor dengan konsep representasi komponen yang telah dipelajari jauh lebih awal, menegaskan koherensi konseptual yang dibangun sepanjang buku ini.

Studi Kasus 4.3 Resolusi Vektor pada Analisis Gaya Benda di Bidang Miring

Dalam mekanika teknik, analisis gerak benda pada bidang miring memerlukan resolusi vektor gaya berat menjadi dua komponen: komponen sejajar bidang miring, yang menyebabkan benda meluncur, dan komponen tegak lurus bidang miring, yang diimbangi oleh gaya normal dari permukaan (Hibbeler, 2022). Apabila bidang miring membentuk sudut α terhadap horizontal, gaya berat $\vec{W}$ diuraikan menjadi komponen sejajar bidang sebesar $W \sin \alpha$ dan komponen tegak lurus bidang sebesar $W \cos \alpha$, keduanya diperoleh melalui prosedur resolusi vektor, hanya dengan vektor acuan berupa arah bidang miring alih-alih sumbu koordinat

standar. Pemahaman terhadap resolusi vektor semacam ini menjadi dasar bagi perhitungan percepatan benda yang meluncur pada bidang miring tanpa gesekan, yaitu $a = g \sin \alpha$, yang dapat diturunkan langsung dari hukum kedua Newton setelah komponen gaya sejajar bidang diperoleh melalui resolusi vektor.

Contoh

Diketahui $\vec{u} = (4, 3)$ dan $\vec{v} = (1, 0)$.

Tentukan proyeksi skalar dan proyeksi vektor $\vec{u}$ pada $\vec{v}$.

Pembahasan:

Langkah pertama adalah menghitung produk titik kedua vektor

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4)(1) + (3)(0) = 4$$

Selanjutnya, panjang vektor $\vec{v}$ adalah

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

Oleh karena itu, proyeksi skalar $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ diperoleh sebagai

$$\text{comp}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{4}{1} = 4$$

Dengan mensubstitusikan nilai yang telah diperoleh,

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{4}{1^2} (1, 0) = 4(1, 0) = (4, 0)$$

Komponen vektor yang tegak lurus terhadap $\vec{v}$ diperoleh dari selisih antara vektor semula dan proyeksinya.

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (4, 3) - (4, 0) = (0, 3)$$

Verifikasi bahwa kedua vektor saling tegak lurus dapat dilakukan dengan menghitung produk titiknya.

$$(0, 3) \cdot (1, 0) = (0)(1) + (3)(0) = 0$$

Karena hasil produk titik sama dengan nol, maka komponen $(0, 3)$ benar-benar ortogonal terhadap vektor $\vec{v}$. Contoh ini menunjukkan secara intuitif bahwa proyeksi $\vec{u}$ pada sumbu- x (diwakili oleh $\vec{v}$) menghasilkan komponen horizontal, sedangkan sisanya adalah komponen vertikal.

D. Interpretasi Geometris Produk Vektor

Interpretasi geometris produk titik dan produk silang memiliki keterkaitan mendalam dengan berbagai konsep dalam geometri analitik dan fisika. Produk titik, melalui interpretasinya sebagai ukuran kesejajaran arah, menjadi dasar bagi definisi sudut antara dua vektor, kriteria ketegaklurusan, serta perhitungan usaha (*work*) dalam fisika, yang secara formal didefinisikan sebagai $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$, yaitu produk titik antara vektor gaya dan vektor perpindahan (Griffiths & Inglefield, 2023). Interpretasi ini menjelaskan mengapa gaya yang tegak lurus terhadap arah gerak tidak melakukan usaha sama sekali, karena produk titiknya bernilai nol.

Produk silang, di sisi lain, memiliki interpretasi geometris ganda yang sangat kaya: sebagai vektor normal bidang yang tegak lurus terhadap dua vektor pembentuknya, dan sebagai ukuran luas jajargenjang melalui panjangnya. Kedua interpretasi ini menjadikan produk silang sebagai alat kunci dalam menentukan persamaan bidang pada ruang tiga dimensi, sebagaimana akan dibahas pada Bab VIII, karena vektor normal bidang dapat langsung diperoleh melalui produk silang dua vektor arah yang terletak pada bidang tersebut (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Dalam fisika, produk silang juga mendasari definisi torsi (*torque*) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ dan momentum sudut, yang keduanya melibatkan hubungan tegak lurus antara vektor posisi dan vektor gaya atau momentum linear.

Perpaduan produk titik dan produk silang menghasilkan operasi lanjutan yang disebut *produk tripel skalar* (*scalar triple product*), dinotasikan $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, yang secara geometris menyatakan volume paralelepipedum yang dibentuk oleh tiga vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ (Colley, 2021). Nilai absolut dari produk tripel skalar ini sama dengan determinan matriks tiga-tiga yang barisnya adalah komponen ketiga vektor tersebut. Apabila nilai produk tripel skalar sama dengan nol, ketiga vektor tersebut dikatakan *koplanar* (*coplanar*), yaitu terletak pada satu bidang yang sama, sebuah kriteria yang sangat berguna dalam menentukan kesebidangan tiga vektor atau empat titik dalam ruang, dan akan digunakan kembali sebagai salah satu kriteria kebebasan linear tiga vektor.

Pemahaman menyeluruh terhadap interpretasi geometris kedua jenis produk vektor ini menjadi bekal esensial bagi pembahasan bab-bab selanjutnya, khususnya Bab VII dan Bab VIII yang membahas penerapan analisis vektor dalam geometri analitik bidang dan ruang. Kedalaman interpretasi geometris ini juga menegaskan bahwa analisis vektor bukan sekadar kumpulan rumus aljabar, melainkan kerangka konseptual yang memiliki makna geometris dan fisis yang kaya, sebagaimana ditekankan dalam berbagai penelitian pendidikan matematika mengenai pentingnya visualisasi dalam pembelajaran vektor (Rahmawati & Suryadi, 2022).

Studi Kasus 4.4 Volume Paralelepipedum dalam Perhitungan Kristalografi

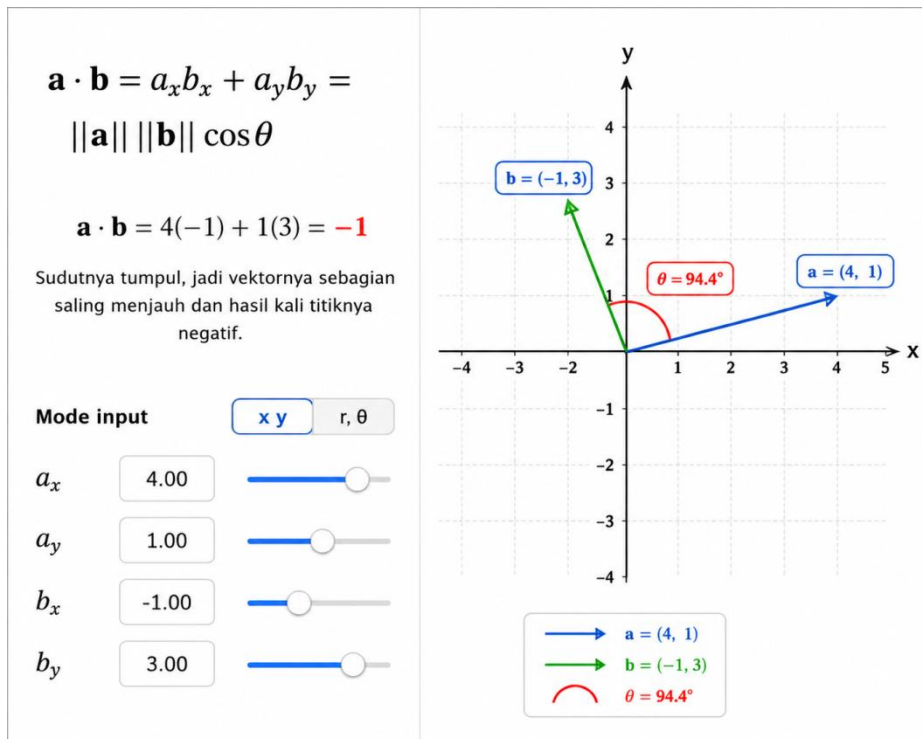
Dalam ilmu kristalografi, struktur kristal suatu material dideskripsikan melalui sel satuan (*unit cell*) yang dibentuk oleh tiga vektor basis kristal $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$, dan volume sel satuan tersebut dihitung langsung menggunakan produk tripel skalar $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (Griffiths & Inglefield, 2023). Volume sel satuan ini menjadi parameter penting dalam menentukan kerapatan material, karena kerapatan dihitung sebagai massa atom-atom dalam sel satuan dibagi dengan volume sel satuan tersebut. Ketika ketiga vektor basis kristal saling tegak lurus, sebagaimana pada struktur kristal kubik, perhitungan volume tereduksi menjadi perkalian sederhana ketiga panjang vektor basis; namun pada struktur kristal yang lebih kompleks seperti struktur rombohedral atau monoklinik, di mana vektor basis tidak saling tegak lurus, produk tripel skalar menjadi satu-satunya cara yang efisien untuk menghitung volume sel satuan secara akurat. Studi kasus ini menegaskan relevansi produk tripel skalar jauh melampaui geometri murni, meluas hingga ke ilmu material dan fisika zat padat.

Studi Kasus 4.5 Produk Silang dalam Analisis Momentum Sudut Peselancar Es

Ketika seorang peselancar es melakukan gerakan berputar (*spin*), kecepatan putarannya dapat dipercepat secara dramatis hanya dengan menarik kedua lengan mendekati tubuh, sebuah fenomena

yang dijelaskan melalui kekekalan momentum sudut, yang didefinisikan sebagai produk silang $L^{\vec{}} = r^{\vec{}} \times p^{\vec{}}$, dengan $r^{\vec{}}$ adalah vektor posisi bagian tubuh terhadap sumbu putar dan $p^{\vec{}}$ adalah momentum linear bagian tubuh tersebut (Halliday, Resnick, & Walker, 2021). Ketika lengan direntangkan, jarak $r^{\vec{}}$ terhadap sumbu putar besar, sehingga untuk mempertahankan momentum sudut total yang konstan (sesuai hukum kekekalan), kecepatan sudut putaran menjadi kecil. Sebaliknya, ketika lengan ditarik mendekati tubuh, jarak $r^{\vec{}}$ mengecil, sehingga kecepatan sudut harus meningkat secara signifikan agar momentum sudut total tetap konstan. Studi kasus ini menunjukkan bagaimana interpretasi geometris produk silang sebagai operasi yang menghubungkan vektor posisi dan vektor momentum linear menjadi kunci untuk memahami fenomena fisis yang tampak menakjubkan namun sesungguhnya mengikuti prinsip matematis yang presisi dan dapat dihitung secara kuantitatif.

Produk vektor (*cross product*) memiliki makna geometris yang sangat penting dalam aljabar linear dan geometri ruang. Berbeda dengan produk titik yang menghasilkan suatu skalar, produk vektor menghasilkan sebuah vektor baru yang memiliki arah dan besar tertentu. Vektor hasil tersebut selalu tegak lurus terhadap kedua vektor pembentuknya sehingga sering disebut sebagai vektor normal terhadap bidang yang dibentuk oleh kedua vektor. Arah vektor normal ditentukan menggunakan kaidah tangan kanan (*right-hand rule*), yaitu dengan melengkungkan jari-jari tangan kanan dari vektor pertama menuju vektor kedua; arah ibu jari menunjukkan arah vektor hasil perkalian silang.



Secara geometris, besar produk vektor sama dengan luas jajargenjang yang dibentuk oleh kedua vektor. Hubungan tersebut dinyatakan oleh:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$$

dengan θ merupakan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$. Apabila kedua vektor saling sejajar atau antiparalel, maka $\theta = 0^\circ$ 180° , sehingga $\sin \theta = 0$. Akibatnya, produk vektor bernilai nol karena luas jajargenjang yang terbentuk juga sama dengan nol. Sebaliknya, apabila kedua vektor saling tegak lurus, maka $\theta = 90^\circ$ dan $\sin \theta = 1$, sehingga besar produk vektor mencapai nilai maksimum, yaitu hasil kali panjang kedua vektor.

Interpretasi geometris ini menunjukkan bahwa produk vektor secara simultan memberikan dua informasi penting, yaitu arah bidang melalui vektor normal dan luas daerah yang dibentuk oleh dua vektor. Oleh karena itu, operasi ini banyak digunakan dalam geometri analitik, fisika, teknik, dan grafika komputer. Dalam mekanika, misalnya, momen gaya (*torque*) dihitung menggunakan produk vektor antara lengan momen dan gaya, sehingga arah rotasi dapat ditentukan secara langsung melalui kaidah tangan kanan. Demikian pula pada grafika komputer tiga dimensi, produk vektor digunakan untuk menentukan orientasi

permukaan, pencahayaan (*lighting*), serta proses rendering objek tiga dimensi.

Selain itu, produk vektor menjadi dasar dalam menentukan luas segitiga di ruang tiga dimensi. Jika dua sisi segitiga dinyatakan oleh vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ maka luas segitiga sama dengan setengah dari besar produk vektor kedua sisi tersebut, yaitu;

$$L_{segitiga} = \frac{1}{2} \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|$$

Hubungan ini memberikan cara yang efisien untuk menghitung luas bangun datar di ruang tanpa harus menentukan tinggi atau sudut secara terpisah. Dengan demikian, produk vektor tidak hanya memiliki makna aljabar, tetapi juga menjadi alat yang sangat penting dalam analisis geometris dan berbagai aplikasi sains serta rekayasa.

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

20%

BAB V

SISTEM KOORDINAT DAN TRANSFORMASI VEKTOR

Representasi vektor yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya secara implisit mengandalkan sistem koordinat Kartesius sebagai kerangka acuan. Namun, dalam banyak permasalahan geometri dan fisika, penggunaan sistem koordinat lain seperti koordinat polar, silinder, atau bola dapat menyederhanakan perhitungan secara signifikan, terutama ketika objek yang dikaji memiliki simetri tertentu (Kreyszig, 2021). Bab ini membahas berbagai sistem koordinat yang umum digunakan dalam analisis vektor, transformasi antar sistem koordinat, serta representasi vektor pada masing-masing sistem tersebut.

Pemilihan sistem koordinat yang tepat merupakan salah satu keterampilan paling praktis yang dapat diperoleh dari mempelajari analisis vektor, sebab keputusan tersebut dapat mengubah suatu masalah yang tampak rumit menjadi jauh lebih sederhana untuk diselesaikan. Sebagaimana akan ditunjukkan sepanjang bab ini melalui berbagai contoh dan studi kasus, prinsip umum yang berlaku adalah memilih sistem koordinat yang selaras dengan simetri geometris permasalahan yang dihadapi, sehingga sebanyak mungkin variabel dapat dieliminasi atau disederhanakan dari persamaan yang harus diselesaikan (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022).

A. Sistem Koordinat Kartesius

Sistem koordinat Kartesius (*Cartesian coordinate system*), dinamai berdasarkan René Descartes yang memperkenalkannya pada abad ke-17, merupakan sistem koordinat yang paling banyak digunakan dalam matematika dan sains karena kesederhanaan dan intuitivitasnya.

Pada ruang dua dimensi, sistem ini terdiri atas dua sumbu saling tegak lurus, yaitu sumbu- x dan sumbu- y , sedangkan pada ruang tiga dimensi ditambahkan sumbu- z yang tegak lurus terhadap kedua sumbu lainnya (Larson & Edwards, 2022). Setiap titik dalam ruang direpresentasikan secara unik oleh tripel terurut (x, y, z) yang menyatakan jarak berarah titik tersebut terhadap ketiga bidang koordinat.

Keunggulan utama sistem koordinat Kartesius terletak pada kesederhanaan rumus jarak dan operasi vektor yang berlaku atasnya. Jarak antara dua titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dihitung melalui rumus $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, yang merupakan perluasan langsung dari teorema Pythagoras (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Selain itu, seluruh operasi aljabar vektor yang telah dibahas pada Bab III, seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar, dilakukan secara langsung terhadap komponen-komponen Kartesius tanpa memerlukan transformasi tambahan, menjadikannya sistem koordinat baku dalam sebagian besar buku teks kalkulus dan aljabar linear.

Meskipun sistem koordinat Kartesius bersifat universal, penggunaannya menjadi kurang efisien ketika objek yang dikaji memiliki simetri melingkar, silindris, atau bola. Sebagai contoh, deskripsi lintasan gerak melingkar dalam koordinat Kartesius memerlukan dua fungsi terpisah $x(t)$ dan $y(t)$ yang saling terkait melalui hubungan trigonometri, sedangkan dalam koordinat polar cukup dinyatakan melalui satu variabel sudut yang berubah secara linear terhadap waktu (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Keterbatasan inilah yang mendorong pengembangan sistem koordinat alternatif.

Sistem koordinat Kartesius merupakan sistem acuan yang digunakan untuk menyatakan posisi suatu titik dalam ruang menggunakan pasangan atau tripel bilangan. Dalam sistem ini, setiap titik direpresentasikan oleh koordinat yang menunjukkan jaraknya terhadap sumbu-sumbu koordinat yang saling tegak lurus. Sistem koordinat Kartesius menjadi dasar dalam geometri analitik, aljabar linear, kalkulus, fisika, serta berbagai bidang rekayasa karena memungkinkan objek geometri dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

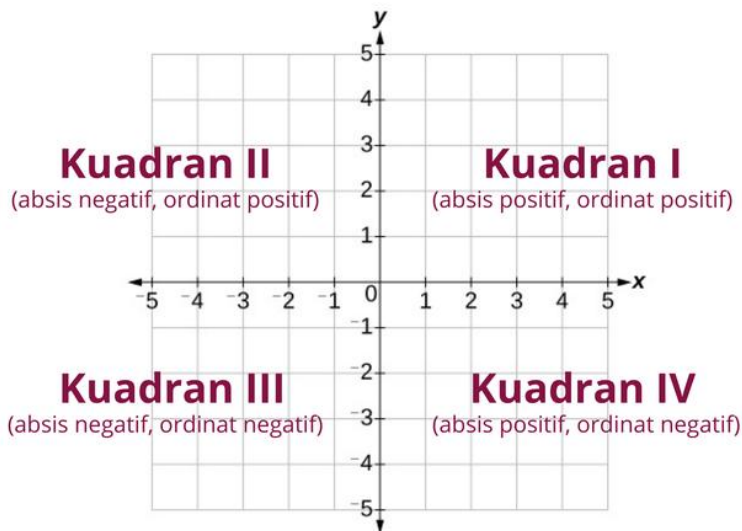
Pada ruang dua dimensi ($\mathbb{R}^2$), sistem koordinat terdiri atas dua sumbu yang saling tegak lurus, yaitu sumbu- x (horizontal) dan sumbu- y (vertikal). Kedua sumbu tersebut berpotongan di titik asal atau origin,

yang dinyatakan sebagai $(0,0)$. Setiap titik pada bidang dituliskan dalam bentuk pasangan berurutan

$$P = (x, y)$$

dengan x menyatakan koordinat horizontal (absis) dan y menyatakan koordinat vertikal (ordinat). Nilai koordinat dapat berupa bilangan positif, negatif, maupun nol, bergantung pada posisi titik terhadap sumbu-sumbu koordinat.

Bidang Kartesius terbagi menjadi empat kuadran berdasarkan tanda koordinat x dan y . Kuadran I memuat titik-titik dengan koordinat $(+,+)$, Kuadran II memiliki koordinat $(-,+)$, Kuadran III memiliki koordinat $(-,-)$, sedangkan Kuadran IV terdiri atas titik-titik dengan koordinat $(+,-)$. Pembagian kuadran ini memudahkan analisis posisi titik, arah vektor, maupun interpretasi sudut dalam geometri analitik.



Pada ruang tiga dimensi ($\mathbb{R}^3$), sistem koordinat diperluas dengan menambahkan sumbu- z yang tegak lurus terhadap bidang xy . Posisi suatu titik dinyatakan sebagai:

$$P = (x, y, z)$$

dengan x , y , dan z masing-masing menunjukkan jarak titik terhadap bidang koordinat yang bersesuaian. Sistem koordinat tiga dimensi banyak digunakan untuk memodelkan objek ruang, lintasan gerak, medan gaya, struktur bangunan, desain teknik, hingga visualisasi grafika komputer.

Dalam konteks vektor, sistem koordinat Kartesius memungkinkan suatu vektor dinyatakan sebagai selisih koordinat antara titik pangkal dan titik ujungnya. Sebagai contoh, jika titik pangkal berada di $A(x_1, y_1)$ dan titik ujung berada di $B(x_2, y_2)$, maka vektor $\overrightarrow{AB}$ dinyatakan sebagai:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Untuk ruang tiga dimensi, representasinya menjadi

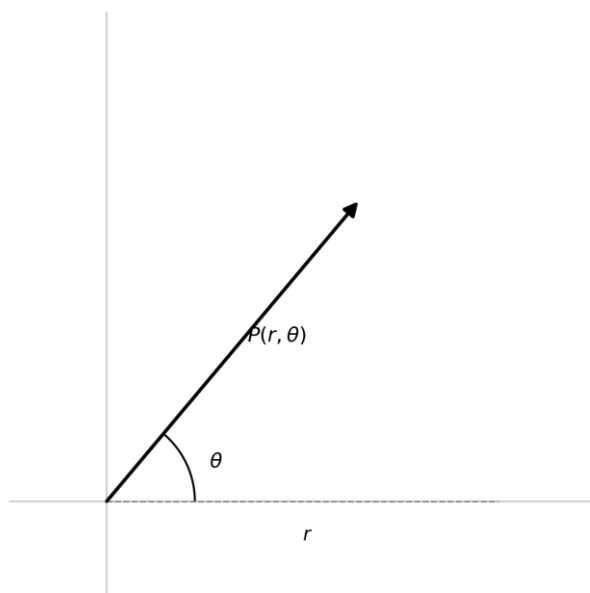
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Representasi koordinat tersebut memungkinkan berbagai operasi vektor, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, produk titik, dan produk silang, dilakukan secara sistematis melalui operasi pada masing-masing komponen. Oleh karena itu, sistem koordinat Kartesius merupakan fondasi utama dalam pembelajaran geometri analitik dan aljabar linear serta menjadi dasar bagi berbagai aplikasi di bidang matematika, fisika, ilmu komputer, dan teknik.

B. Sistem Koordinat Polar, Silinder, dan Bola

Sistem koordinat polar (*polar coordinate system*) merupakan sistem koordinat dua dimensi alternatif yang menyatakan posisi suatu titik melalui jarak r dari titik asal dan sudut θ yang dibentuk terhadap sumbu acuan (biasanya sumbu- x positif). Hubungan transformasi antara koordinat polar (r, θ) dan koordinat Kartesius (x, y) dinyatakan melalui $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, sedangkan transformasi kebalikannya adalah $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\theta = \arctan(y/x)$ dengan memperhatikan kuadran yang sesuai (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Sistem koordinat polar sangat efisien untuk mendeskripsikan kurva-kurva yang memiliki simetri terhadap titik asal, seperti lingkaran, spiral, dan kurva mawar (*rose curve*).

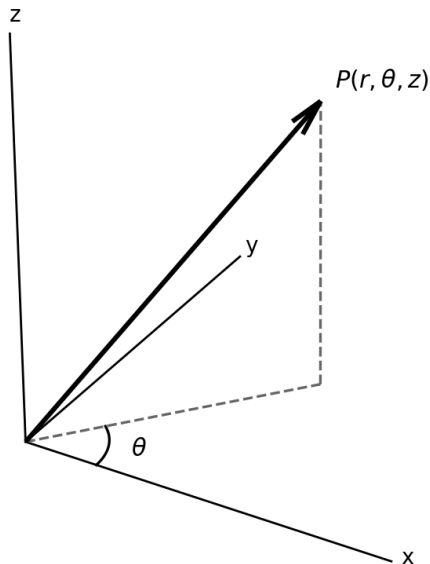
Gambar 5.1 Sistem Koordinat Polar



Posisi titik P dinyatakan melalui jarak r dari titik asal dan sudut θ terhadap sumbu- x positif. Representasi ini secara signifikan menyederhanakan deskripsi kurva-kurva bersimetri pusat dibandingkan koordinat Kartesius (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Perluasan sistem koordinat polar ke ruang tiga dimensi menghasilkan dua sistem koordinat yang berbeda, yaitu *sistem koordinat silinder* (*cylindrical coordinate system*) dan *sistem koordinat bola* (*spherical coordinate system*). Sistem koordinat silinder menyatakan posisi titik melalui tripel (r, θ, z) , dengan r dan θ memiliki makna yang sama seperti pada koordinat polar untuk proyeksi titik pada bidang- xy , sedangkan z tetap menyatakan ketinggian seperti pada koordinat Kartesius (Hass, Heil, & Weir, 2022). Sistem ini sangat sesuai untuk mendeskripsikan objek-objek yang memiliki simetri terhadap suatu sumbu, seperti silinder, kerucut, dan pipa.

Gambar 5.2 Sistem Koordinat Silinder



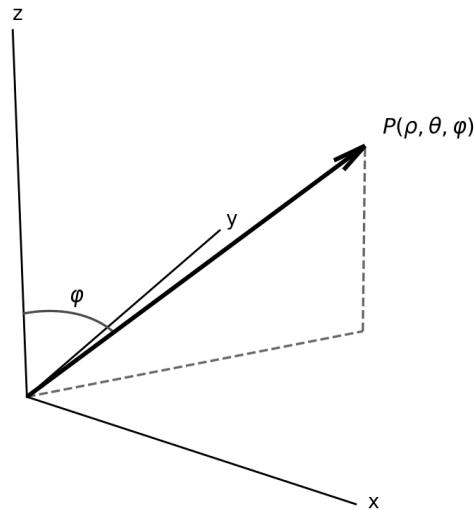
Posisi titik $P(r, \theta, z)$ pada koordinat silinder ditentukan oleh jarak radial r pada bidang- xy , sudut azimuth θ , dan ketinggian z yang identik dengan koordinat Kartesius. Sistem ini sangat sesuai untuk objek dengan simetri terhadap suatu sumbu (Hass, Heil, & Weir, 2022).

Sistem koordinat bola menyatakan posisi titik melalui tripel (ρ, θ, φ) , dengan ρ menyatakan jarak titik terhadap titik asal, θ menyatakan sudut azimuth (sama seperti θ pada koordinat polar), dan φ menyatakan sudut polar atau sudut kolatitudinal yang diukur dari sumbu- z positif. Hubungan transformasi ke koordinat Kartesius dinyatakan melalui $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, dan $z = \rho \cos \varphi$ (Zill & Wright, 2022). Sistem koordinat bola sangat bermanfaat untuk mendeskripsikan objek-objek yang memiliki simetri terhadap suatu titik pusat, seperti bola, medan gravitasi, dan medan listrik dari muatan titik, sehingga banyak digunakan dalam elektrostatika dan mekanika langit.

Ketiga sistem koordinat yang telah dibahas yaitu Kartesius, silinder, dan bola bukanlah satu-satunya sistem koordinat yang dikenal dalam matematika dan fisika. Sistem koordinat lain seperti koordinat elipsoidal, koordinat toroidal, dan koordinat parabolik juga dikembangkan untuk menangani permasalahan dengan simetri khusus yang tidak sesuai dengan ketiga sistem standar tersebut, meskipun jarang dibahas pada tingkat pengantar karena kompleksitas transformasinya (Kreyszig, 2021). Prinsip umum yang mendasari seluruh sistem

koordinat khusus tersebut tetap sama dengan yang telah dibahas pada bab ini, yaitu memilih variabel-variabel yang selaras dengan simetri geometris permasalahan yang dihadapi, sehingga persamaan yang menggambarkan permasalahan tersebut menjadi sesederhana mungkin.

Gambar 5.3 Sistem Koordinat Bola



Posisi titik $P(\rho, \theta, \phi)$ ditentukan oleh jarak ρ terhadap titik asal, sudut azimut θ , dan sudut polar ϕ yang diukur dari sumbu- z positif. Sistem ini sangat sesuai untuk objek dengan simetri terhadap suatu titik pusat, seperti medan gravitasi dan medan listrik muatan titik (Zill & Wright, 2022).

Studi Kasus 5.1 Sistem Koordinat Bola dalam Penentuan Lokasi Geografis

Sistem koordinat bola memiliki analogi langsung dengan sistem koordinat geografis yang digunakan sehari-hari untuk menentukan lokasi di permukaan bumi, yaitu garis lintang (*latitude*) dan garis bujur (*longitude*). Garis bujur pada dasarnya setara dengan sudut azimut θ pada koordinat bola, sedangkan garis lintang berkaitan dengan komplemen sudut polar ϕ , dengan jari-jari ρ yang secara mendekati konstan sama dengan jari-jari bumi untuk titik-titik di permukaan (Zill & Wright, 2022). Sistem penentuan posisi global yang telah disinggung pada Studi Kasus 1.1 pada dasarnya menghitung posisi penerima dalam koordinat Kartesius tiga

dimensi berpusat di bumi, kemudian mengonversinya menjadi koordinat geografis lintang-bujur-ketinggian yang lebih familiar bagi pengguna, menggunakan hubungan transformasi yang secara struktural identik dengan transformasi antara koordinat Kartesius dan koordinat bola. Studi kasus ini menegaskan bahwa sistem koordinat yang tampak abstrak dalam konteks akademik sesungguhnya menjadi dasar bagi sistem navigasi yang digunakan miliaran orang setiap hari melalui perangkat telepon pintar mereka.

Contoh

Diketahui sebuah titik dalam sistem koordinat Kartesius $P = (1, 1, \sqrt{2})$. Nyatakan titik tersebut ke dalam koordinat bola (*spherical coordinates*).

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \rho &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} \\ \rho &= \sqrt{1 + 1 + 2} = \sqrt{4} = 2\end{aligned}$$

Sudut φ dihitung melalui $\cos \varphi = z/\rho = \sqrt{2}/2$, sehingga $\varphi = 45^\circ$. Sudut θ dihitung melalui $\tan \theta = y/x = 1/1 = 1$, dengan x dan y positif (kuadran pertama), sehingga $\theta = 45^\circ$. Jadi, koordinat bola titik tersebut adalah $(\rho, \theta, \varphi) = (2, 45^\circ, 45^\circ)$. Contoh ini memperlihatkan bahwa transformasi dari koordinat Kartesius ke koordinat bola dilakukan dengan menghitung jarak titik terhadap pusat koordinat serta menentukan dua sudut yang menunjukkan arah posisi titik. Pada kasus ini, nilai koordinat menghasilkan sudut-sudut istimewa, sehingga proses perhitungannya menjadi lebih sederhana dan mudah dipahami.

Tabel 5.1 Perbandingan Tiga Sistem Koordinat Ruang

Sistem	Variabel	Transformasi ke Kartesius	Kesesuaian Simetri
Kartesius	(x, y, z)	$x=x, y=y, z=z$	Umum, tanpa simetri khusus

Silinder	(r, θ, z)	$x=r \cos \theta, y=r \sin \theta, z=z$	Simetri terhadap sumbu
Bola	(ρ, θ, ϕ)	$x=\rho \sin \phi \cos \theta, y=\rho \sin \phi \sin \theta, z=\rho \cos \phi$	Simetri terhadap titik pusat

Sumber: Hass, Heil, & Weir (2022) dan Zill & Wright (2022)

Tabel 5.1 memperlihatkan perbandingan tiga sistem koordinat yang paling sering digunakan dalam matematika, fisika, dan teknik. Sistem koordinat Kartesius menggunakan tiga sumbu yang saling tegak lurus sehingga sesuai untuk menggambarkan objek dengan bentuk umum atau yang tidak memiliki simetri tertentu. Sistem ini menjadi dasar berbagai operasi geometri dan analisis ruang tiga dimensi.

Sistem koordinat silinder merupakan pengembangan dari koordinat polar ke ruang tiga dimensi. Sistem ini menggunakan koordinat radial (r), sudut azimuth (θ), dan tinggi (z). Oleh karena itu, koordinat silinder lebih efisien digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang memiliki simetri terhadap suatu sumbu, misalnya tabung, pipa, atau distribusi medan di sekitar kawat lurus.

Sementara itu, sistem koordinat bola menggunakan jarak dari titik pusat (ρ), sudut azimuth (θ), dan sudut polar (ϕ). Sistem ini sangat sesuai untuk objek yang memiliki simetri radial atau simetri terhadap titik pusat, seperti bola, planet, gelombang yang menyebar dari satu sumber, maupun medan gravitasi dan medan listrik yang berasal dari sebuah titik. Pemilihan sistem koordinat yang tepat akan menyederhanakan pemodelan matematis serta mempermudah proses penyelesaian berbagai persoalan geometri maupun persamaan diferensial.

C. Transformasi Antar Sistem Koordinat

Transformasi antar sistem koordinat merupakan proses mengonversi representasi posisi suatu titik atau komponen suatu vektor dari satu sistem koordinat ke sistem koordinat lainnya. Selain transformasi antara koordinat Kartesius dengan koordinat polar, silinder, dan bola yang telah dibahas, transformasi juga dapat terjadi antar sistem koordinat Kartesius itu sendiri, misalnya melalui rotasi sumbu koordinat (Kreyszig, 2021).

Secara umum, terdapat tiga sistem koordinat yang paling banyak digunakan, yaitu koordinat Kartesius, koordinat silinder, dan koordinat bola. Koordinat Kartesius menggunakan tiga sumbu yang saling tegak lurus sebagai acuan posisi suatu titik, sedangkan koordinat silinder mengombinasikan koordinat polar pada bidang datar dengan tinggi pada arah sumbu z . Adapun koordinat bola menyatakan posisi titik berdasarkan jarak dari titik pusat serta dua sudut yang menunjukkan arah titik tersebut. Ketiga sistem ini saling berhubungan melalui persamaan transformasi yang dapat digunakan sesuai kebutuhan. Transformasi rotasi pada bidang dua dimensi dengan sudut rotasi θ dinyatakan melalui matriks transformasi yang memetakan koordinat lama (x, y) ke koordinat baru (x', y') melalui $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ dan $y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$.

Transformasi koordinat memiliki peranan penting dalam menentukan apakah suatu besaran benar-benar tergolong vektor. Suatu besaran dikatakan bertransformasi sebagai vektor jika komponen-komponennya berubah mengikuti hukum transformasi linear yang konsisten ketika sistem koordinat dirotasikan atau ditransformasikan (Griffiths & Inglefield, 2023). Sifat invariansi panjang vektor terhadap transformasi rotasi, yaitu $|v|$ tetap sama meskipun komponen-komponennya berubah pada sistem koordinat baru, menjadi salah satu ciri khas yang membedakan besaran vektor sejati dari sekadar himpunan bilangan yang disusun berjajar.

Dalam praktiknya, pemilihan sistem koordinat yang tepat dapat sangat menyederhanakan penyelesaian suatu masalah matematis atau fisis. Sebagai contoh, integral lipat yang melibatkan daerah berbentuk lingkaran atau bola akan jauh lebih mudah diselesaikan menggunakan koordinat polar atau bola dibandingkan koordinat Kartesius, karena batas-batas integrasi menjadi lebih sederhana dan elemen luas atau volume memiliki bentuk yang lebih alami pada sistem koordinat tersebut (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Kemampuan memilih dan bertransformasi antar sistem koordinat secara tepat menjadi keterampilan penting yang akan banyak dimanfaatkan pada pembahasan integral vektor.

Transformasi koordinat banyak diterapkan dalam berbagai bidang ilmu. Dalam teknik mesin dan robotika, perubahan koordinat digunakan untuk menentukan posisi lengan robot terhadap suatu objek. Dalam fisika, transformasi koordinat mempermudah analisis medan

listrik, medan gravitasi, maupun pergerakan partikel. Pada grafika komputer, transformasi koordinat menjadi dasar dalam proses pemodelan objek tiga dimensi, animasi, serta simulasi visual.

Secara matematis, transformasi antar sistem koordinat bersifat satu-ke-satu, sehingga setiap titik dalam suatu sistem memiliki representasi yang ekuivalen pada sistem lainnya. Oleh karena itu, meskipun nilai koordinat berubah, lokasi geometris titik di dalam ruang tetap sama. Prinsip inilah yang menjadikan transformasi koordinat sebagai salah satu konsep dasar dalam geometri analitik dan kalkulus multivariabel.

1. Transformasi dari Koordinat Kartesius ke Koordinat Silinder

Misalkan suatu titik dinyatakan dalam koordinat Kartesius sebagai (x,y,z) . Koordinat silinder (r, θ, z) diperoleh melalui persamaan berikut.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z\end{aligned}$$

Dalam penerapannya, nilai sudut θ harus disesuaikan dengan kuadran tempat titik berada agar hasil transformasi sesuai dengan posisi sebenarnya.

2. Transformasi dari Koordinat Silinder ke Koordinat Kartesius

Apabila diketahui koordinat silinder (r, θ, z) , maka koordinat Kartesius diperoleh melalui persamaan

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z\end{aligned}$$

Transformasi ini banyak digunakan ketika hasil analisis pada sistem silinder perlu divisualisasikan dalam sistem Kartesius.

3. Transformasi dari Koordinat Kartesius ke Koordinat Bola

Untuk titik (x,y,z) , koordinat bola (ρ,θ,ϕ) dihitung menggunakan persamaan:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\rho} \right)$$

Besaran ρ menyatakan jarak titik terhadap titik asal, sedangkan θ dan ϕ menentukan arah posisi titik dalam ruang.

4. Transformasi dari Koordinat Bola ke Koordinat Kartesius

Jika diketahui koordinat bola (ρ, θ, ϕ) , maka koordinat Kartesius diperoleh melalui persamaan:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Transformasi ini banyak digunakan dalam simulasi tiga dimensi, navigasi, astronomi, serta analisis medan yang memiliki simetri radial.

5. Transformasi antara Koordinat Silinder dan Koordinat Bola

Hubungan antara koordinat silinder dan koordinat bola juga dapat dinyatakan secara langsung tanpa melalui koordinat Kartesius. Dari koordinat silinder ke koordinat bola:

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\theta = \theta$$

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{z}{\rho} \right)$$

Sebaliknya, dari koordinat bola ke koordinat silinder:

$$r = \rho \sin \phi$$

$$\theta = \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Transformasi ini sangat berguna ketika suatu persoalan memiliki karakteristik yang dapat diselesaikan lebih mudah menggunakan salah satu sistem koordinat tanpa harus kembali ke sistem Kartesius.

Contoh

Tentukan hasil transformasi rotasi sumbu koordinat sebesar 30° terhadap titik $(2, 1)$ pada bidang.

Pembahasan: Transformasi rotasi sumbu koordinat sebesar (θ) diberikan oleh persamaan:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

karena : $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$

dan $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$

maka diperoleh koordinat baru sebagai berikut.

Komponen x' : $x' = 2(0.866) + 1(0.5) = 1.732 + 0.5 = 2.232$

Komponen y' : $y' = -2(0.5) + 1(0.866) = -1 + 0.866 = -0.134$

Dengan demikian, koordinat titik setelah transformasi rotasi sumbu adalah $(x', y') = (2.232, -0.134)$

Sebagai verifikasi, panjang vektor posisi sebelum dan sesudah rotasi harus tetap sama karena rotasi merupakan transformasi isometri. Sebelum rotasi, panjang vector posisi adalah:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

Sesudah rotasi,

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(2.232)^2 + (-0.134)^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

Hasil tersebut menunjukkan bahwa panjang vektor tetap, sehingga perhitungan transformasi rotasi sumbu koordinat telah dilakukan dengan benar. Hasil transformasi rotasi sumbu koordinat sebesar 30° terhadap titik $(2,1)$ adalah $(2.232, -0.134)$. Contoh ini menunjukkan bahwa rotasi sumbu koordinat mengubah nilai koordinat suatu titik tanpa mengubah posisi geometris relatifnya terhadap titik asal. Oleh karena itu, transformasi rotasi termasuk transformasi isometri yang mempertahankan panjang, sudut, dan bentuk objek. Prinsip ini banyak dimanfaatkan dalam geometri analitik, grafika komputer, robotika, teknik mesin, dan analisis sistem koordinat.

D. Representasi Vektor pada Berbagai Sistem Koordinat

Representasi vektor pada sistem koordinat non-Kartesian memerlukan perhatian khusus karena vektor basis pada sistem koordinat lengkung (*curvilinear coordinates*) seperti koordinat polar, silinder, dan bola tidak bersifat konstan, melainkan berubah arah bergantung pada posisi titik yang ditinjau. Pada koordinat polar, misalnya, digunakan vektor basis satuan $\hat{r}$ yang mengarah menjauhi titik asal dan $\hat{\theta}$ yang mengarah tegak lurus terhadap $\hat{r}$ searah pertambahan sudut θ , keduanya bergantung pada posisi titik (Colley, 2021). Hal ini berbeda mendasar

dengan vektor basis Kartesius $\vec{i}, \vec{j}$, dan $\vec{k}$ yang arahnya selalu tetap di setiap titik dalam ruang.

Pada sistem koordinat silinder, vektor basis yang digunakan adalah $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, dan $\hat{k}$, dengan $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ memiliki makna serupa dengan koordinat polar pada bidang- xy , sedangkan $\hat{k}$ tetap konstan searah sumbu- z positif. Pada sistem koordinat bola, digunakan tiga vektor basis $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$, dan $\hat{\phi}$ yang ketiganya saling tegak lurus namun bergantung pada posisi titik yang ditinjau (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Ketergantungan posisi pada vektor basis inilah yang menjadikan diferensiasi vektor pada sistem koordinat lengkung memerlukan suku-suku tambahan yang tidak muncul pada sistem koordinat Kartesius, sebuah topik yang akan dibahas lebih lanjut ketika mengkaji operator gradien, divergensi, dan *curl* pada Bab X.

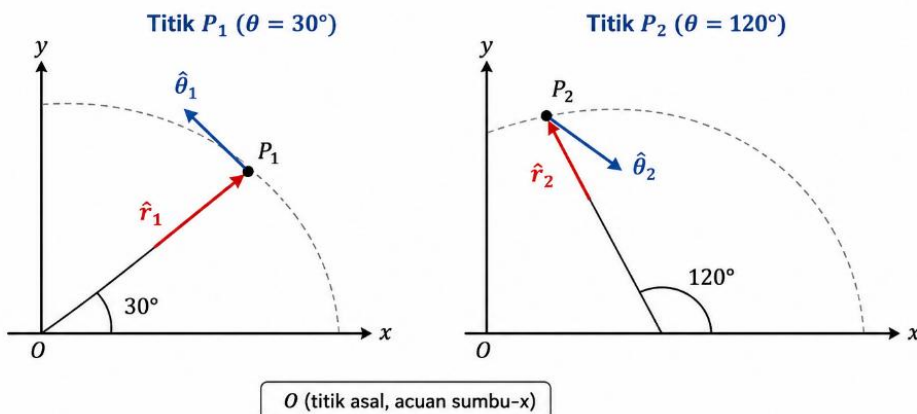
Kesadaran akan perbedaan sifat vektor basis pada berbagai sistem koordinat ini penting untuk mencegah kesalahan konseptual, khususnya ketika menurunkan rumus kecepatan dan percepatan pada gerak melingkar atau gerak dalam medan sentral. Sebagai ilustrasi, percepatan pada gerak melingkar dalam koordinat polar tidak hanya melibatkan turunan terhadap komponen r dan θ , tetapi juga suku tambahan yang muncul akibat perubahan arah vektor basis $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ terhadap waktu (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Pemahaman yang cermat terhadap fenomena ini menjadi bekal penting bagi pembaca yang akan melanjutkan studi ke mekanika klasik lanjut maupun mekanika fluida, di mana representasi vektor pada sistem koordinat lengkung digunakan secara ekstensif.

Studi Kasus 5.2 Sistem Koordinat dalam Pencitraan Medis Tomografi

Teknik pencitraan tomografi komputer (*computed tomography*, CT scan) dan pencitraan resonansi magnetik (MRI) memanfaatkan berbagai sistem koordinat sesuai dengan geometri organ yang dipindai. Pemindaian otak, misalnya, sering direpresentasikan menggunakan koordinat silinder karena bentuk kepala yang mendekati silinder memanjang, sedangkan pemindaian organ yang lebih mendekati bentuk bola, seperti mata, dapat direpresentasikan lebih alami menggunakan koordinat bola (Kundu, Cohen, &

Dowling, 2022). Algoritma rekonstruksi citra dari data mentah pemindaian melibatkan transformasi koordinat yang kompleks antara ruang data mentah (domain frekuensi atau domain proyeksi) dan ruang citra akhir yang ditampilkan kepada dokter, dengan pemilihan sistem koordinat yang tepat pada setiap tahap pemrosesan secara signifikan memengaruhi efisiensi komputasi dan kualitas citra yang dihasilkan. Studi kasus ini menegaskan bahwa keterampilan memilih dan bertransformasi antar sistem koordinat, memiliki dampak praktis langsung terhadap kualitas diagnosis medis yang dialami pasien di seluruh dunia.

Gambar 5.4 Vektor Basis pada Koordinat Polar di Dua Titik Berbeda



Gambar memperlihatkan bahwa arah vektor basis $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ pada koordinat polar berubah bergantung pada posisi titik yang ditinjau, berbeda dengan vektor basis Kartesius $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ yang arahnya selalu tetap di seluruh titik ruang. Pada titik P_1 dengan sudut 30° , arah $\hat{r}_1$ dan $\hat{\theta}_1$ berbeda dari arah $\hat{r}_2$ dan $\hat{\theta}_2$ pada titik P_2 dengan sudut 120° . Ketergantungan posisi ini menjadi sumber suku-suku tambahan ketika melakukan diferensiasi vektor pada sistem koordinat lengkung (Colley, 2021).

Contoh

Nyatakan titik dengan koordinat silinder $(4, 120^\circ, 3)$ ke dalam koordinat Kartesius.

Pembahasan: Menggunakan rumus transformasi $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$, dengan $r=4$ dan $\theta=120^\circ$

$$x = 4 \cos 120^\circ = 4(-0.5) = -2$$

dan

$$y = 4 \sin 120^\circ = 4(\sqrt{3}/2) \approx 3.46$$

Koordinat z tetap sama, yaitu $z=3$. Jadi koordinat Kartesiusnya adalah $(-2, 3.46, 3)$. Contoh ini menegaskan bahwa transformasi dari koordinat silinder ke Kartesius hanya memengaruhi komponen x dan y , sementara komponen z tetap tidak berubah, sejalan dengan definisi koordinat silinder yang mempertahankan ketinggian yang identik dengan koordinat Kartesius.

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

20%

BAB VI

RUANG VEKTOR DAN STRUKTUR ALJABARNYA

Pembahasan pada bab-bab sebelumnya berfokus pada vektor geometris dalam ruang dua dan tiga dimensi. Bab ini mengangkat pembahasan ke tingkat abstraksi yang lebih tinggi dengan memperkenalkan konsep *ruang vektor* (*vector space*) secara aksiomatis, sebagaimana telah disinggung sekilas pada Bab III ketika membahas sifat-sifat aljabar vektor. Generalisasi ini penting karena memungkinkan gagasan vektor diterapkan pada objek-objek matematika yang jauh lebih luas daripada sekadar anak panah dalam ruang geometris, termasuk polinomial, matriks, dan fungsi (Axler, 2024).

Peralihan dari vektor geometris konkret menuju ruang vektor abstrak merupakan salah satu langkah paling penting dalam perjalanan belajar matematika seorang mahasiswa, sebab langkah ini menuntut kemampuan berpikir pada tingkat yang lebih tinggi, di mana pembuktian dan penalaran logis mengambil alih peran yang sebelumnya banyak dimainkan oleh intuisi visual. Bab ini dirancang untuk menjembatani transisi tersebut secara bertahap, dengan senantiasa mengaitkan konsep-konsep abstrak yang baru dengan contoh-contoh konkret yang telah dikenal pada bab-bab sebelumnya (Lay, Lay, & McDonald, 2021).

A. Konsep Ruang Vektor

Ruang vektor merupakan salah satu konsep fundamental dalam aljabar linear yang menjadi dasar bagi berbagai cabang matematika, seperti geometri analitik, kalkulus multivariabel, optimisasi, statistika, dan analisis numerik. Konsep ini memperluas pengertian vektor yang semula hanya dipandang sebagai besaran yang memiliki panjang dan

arah menjadi suatu himpunan objek matematis yang memenuhi seperangkat aksioma tertentu. Objek-objek tersebut tidak hanya berupa vektor pada bidang atau ruang tiga dimensi, tetapi juga dapat berupa matriks, polinom, fungsi, maupun barisan bilangan.

Secara intuitif, ruang vektor merupakan himpunan yang anggotanya dapat dijumlahkan satu sama lain dan dapat dikalikan dengan suatu skalar tanpa keluar dari himpunan tersebut. Kedua operasi tersebut harus memenuhi sejumlah sifat atau aksioma, seperti sifat komutatif, asosiatif, adanya elemen nol, adanya invers penjumlahan, serta distributivitas terhadap penjumlahan dan perkalian skalar (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Dengan terpenuhinya aksioma tersebut, berbagai operasi matematika dapat dilakukan secara konsisten.

Dalam geometri, ruang vektor digunakan untuk merepresentasikan posisi, arah, perpindahan, serta transformasi suatu objek. Sebagai contoh, posisi sebuah titik pada bidang dapat dinyatakan sebagai vektor, sedangkan perpindahan suatu benda dapat dipandang sebagai penjumlahan beberapa vektor. Di bidang teknik, ruang vektor digunakan dalam analisis gaya, rangkaian listrik, grafika komputer, robotika, pengolahan citra, hingga kecerdasan buatan. Oleh karena itu, pemahaman mengenai ruang vektor menjadi landasan penting sebelum mempelajari konsep basis, dimensi, transformasi linear, nilai eigen, dan aplikasi aljabar linear lainnya.

1. Pengertian Ruang Vektor

Suatu ruang vektor adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian skalar, sehingga memenuhi seluruh aksioma ruang vektor.

Apabila: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

- Penjumlahan vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
- Perkalian skalar $k\mathbf{u} \in V$

Artinya, hasil penjumlahan dua vektor maupun hasil perkalian sebuah vektor dengan suatu skalar tetap berada di dalam ruang vektor yang sama.

Beberapa contoh ruang vektor yang sering dijumpai antara lain sebagai berikut.

- a) Ruang vektor dua dimensi $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

Contoh vektor: $(2,3), (-1,4), (0,5)$.

b) Ruang vektor tiga dimensi $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Contoh vektor: $(1, 2, 3), (-2, 0, 5)$

c) Ruang matriks

Semua matriks berordo $(m \times n)$ membentuk ruang vektor apabila operasi yang digunakan adalah penjumlahan matriks dan perkalian skalar.

d) Ruang polinom: Himpunan seluruh polinom berderajat paling tinggi n $P_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ merupakan ruang vektor.

Secara geometris, setiap vektor dapat dipandang sebagai panah yang memiliki arah dan panjang tertentu. Penjumlahan dua vektor menghasilkan sebuah vektor baru yang dapat ditentukan menggunakan aturan segitiga atau jajargenjang, sedangkan perkalian skalar akan memperbesar, memperkecil, atau membalik arah vektor bergantung pada nilai skalarnya.

Ruang vektor merupakan himpunan objek matematis yang memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian skalar sesuai dengan aksioma tertentu. Konsep ini tidak hanya mencakup vektor pada bidang dan ruang, tetapi juga matriks, polinom, dan fungsi. Pemahaman mengenai ruang vektor menjadi fondasi utama dalam mempelajari aljabar linear karena hampir seluruh konsep lanjutan, seperti basis, dimensi, transformasi linear, ruang eigen, dan aplikasi komputasi ilmiah, dibangun di atas konsep tersebut.

Studi Kasus 6.1 Ruang Vektor Polinomial dalam Kompresi Sinyal Audio dan Gambar

Teknik kompresi sinyal audio dan gambar digital, seperti yang digunakan dalam format MP3 dan JPEG, memanfaatkan representasi sinyal sebagai elemen ruang vektor fungsi, khususnya melalui transformasi Fourier atau transformasi kosinus diskret yang menyatakan sinyal sebagai kombinasi linear dari fungsi-fungsi basis sinusoidal (Axler, 2024). Ruang fungsi periodik pada dasarnya membentuk ruang vektor berdimensi tak hingga, dengan fungsi-fungsi sinus dan kosinus pada berbagai frekuensi berperan sebagai basis ortogonal, analog dengan basis standar $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ pada ruang $\mathbb{R}^3$. Proses kompresi pada dasarnya adalah pemotongan (*truncation*) koefisien-koefisien kombinasi linear yang

kontribusinya kecil terhadap persepsi visual atau auditori manusia, sehingga sinyal dapat direpresentasikan menggunakan lebih sedikit "koordinat" tanpa kehilangan kualitas yang signifikan. Studi kasus ini menunjukkan bahwa konsep ruang vektor abstrak, jauh dari sekadar latihan matematis murni, menjadi fondasi bagi hampir seluruh teknologi multimedia digital yang digunakan sehari-hari.

Untuk memverifikasi apakah suatu himpunan dengan operasi tertentu membentuk ruang vektor, tidak diperlukan pengecekan seluruh delapan aksioma dari awal apabila himpunan tersebut merupakan bagian dari ruang vektor yang telah diketahui. Dalam kasus demikian, cukup diperiksa apakah himpunan tersebut tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian skalar, karena sifat-sifat aljabar lainnya otomatis diwariskan dari ruang vektor induknya (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Prinsip inilah yang mendasari konsep subruang.

Penting dicatat bahwa tidak semua himpunan yang tampak memiliki struktur aljabar otomatis memenuhi seluruh aksioma ruang vektor. Sebagai contoh, himpunan seluruh vektor pada bidang yang panjangnya sama dengan satu (yaitu, himpunan seluruh vektor satuan) *bukan* merupakan ruang vektor, karena himpunan tersebut tidak mengandung vektor nol dan tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan (penjumlahan dua vektor satuan umumnya tidak menghasilkan vektor satuan) (Zill & Wright, 2022). Contoh kontra semacam ini penting untuk melatih ketelitian dalam memverifikasi aksioma ruang vektor secara sistematis, bukan sekadar berdasarkan intuisi visual.

Biografi Singkat: Giuseppe Peano dan David Hilbert

Giuseppe Peano (1858-1932), seorang matematikawan Italia, dikenal luas atas kontribusinya dalam merumuskan aksioma bilangan asli (aksioma Peano) dan menjadi salah satu tokoh pertama yang merumuskan definisi aksiomatis ruang vektor secara formal pada akhir abad ke-19, jauh mendahului pengakuan luas terhadap pendekatan aksiomatis dalam aljabar linear. David Hilbert (1862-1943), seorang matematikawan Jerman yang dianggap sebagai salah satu matematikawan paling berpengaruh pada

masanya, mengembangkan konsep ruang Hilbert sebagai generalisasi ruang vektor berdimensi tak hingga yang dilengkapi struktur hasil kali dalam, yang kemudian menjadi fondasi matematis bagi mekanika kuantum modern. Kontribusi Hilbert dalam mengembangkan fondasi aksiomatis matematika secara umum, termasuk daftar dua puluh tiga masalah terbuka yang diajukannya pada tahun 1900, turut membentuk arah perkembangan matematika abad ke-20, termasuk perkembangan lebih lanjut teori ruang vektor yang dibahas pada bab ini (Katz & Parshall, 2022).

B. Subruang, Basis, dan Dimensi

Subruang (*subspace*) dari suatu ruang vektor V adalah himpunan bagian W dari V yang, dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang sama seperti pada V , juga membentuk ruang vektor. Untuk memverifikasi apakah suatu himpunan bagian W merupakan subruang, cukup diperiksa tiga syarat:

- (1) W memuat vektor nol dari V
- (2) W tertutup terhadap penjumlahan, artinya jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in W$
- (3) W tertutup terhadap perkalian skalar, artinya jika $\vec{v} \in W$ dan k adalah sembarang skalar maka $k\vec{v} \in W$ (Colley, 2021)

Ketiga syarat ini sudah cukup karena aksioma-aksioma lainnya otomatis terwarisi dari ruang vektor induk V .

Basis suatu ruang vektor V adalah himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ yang memenuhi dua sifat sekaligus, yaitu bebas linear dan membentang (*spanning*) seluruh ruang V , artinya setiap vektor dalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear tunggal dari vektor-vektor basis tersebut (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Basis standar untuk ruang $\mathbb{R}^3$, misalnya, adalah himpunan $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, meskipun terdapat tak berhingga banyak pilihan basis lain yang juga sah untuk ruang yang sama, selama memenuhi kedua sifat tersebut.

Dimensi (*dimension*) suatu ruang vektor didefinisikan sebagai banyaknya vektor dalam basis ruang vektor tersebut, dan dapat dibuktikan bahwa semua basis dari suatu ruang vektor yang sama

memiliki jumlah anggota yang identik, sehingga dimensi merupakan invarian yang terdefinisi dengan baik (*well-defined*) untuk setiap ruang vektor berdimensi hingga (Axler, 2024). Ruang $\mathbb{R}^n$ memiliki dimensi n , ruang polinomial P_n memiliki dimensi $n+1$ (karena basis standarnya adalah $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$), sedangkan ruang matriks $M_{m \times n}$ memiliki dimensi $m \times n$. Konsep dimensi ini memberikan ukuran kuantitatif terhadap "ukuran" atau "derajat kebebasan" suatu ruang vektor.

Tidak seluruh ruang vektor memiliki dimensi berhingga. Ruang seluruh fungsi kontinu pada suatu interval, misalnya, merupakan ruang vektor berdimensi tak hingga, karena tidak terdapat himpunan berhingga fungsi yang mampu membentang seluruh ruang tersebut melalui kombinasi linear (Axler, 2024). Ruang vektor berdimensi tak hingga semacam ini menjadi objek kajian utama dalam cabang matematika yang disebut analisis fungsional, yang memiliki aplikasi luas dalam persamaan diferensial, mekanika kuantum, dan pemrosesan sinyal. Meskipun pembahasan mendalam mengenai ruang berdimensi tak hingga berada di luar cakupan buku pengantar ini, penting bagi pembaca untuk menyadari keberadaannya sebagai perluasan alami dari konsep dimensi berhingga yang menjadi fokus utama Bab VI.

Tabel 6.1 Dimensi Beberapa Ruang Vektor Umum

Ruang Vektor	Basis Standar	Dimensi
$\mathbb{R}^n$	$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$	n
P_n (polinomial derajat $\leq n$)	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$	$n+1$
$M_{m \times n}$ (matriks $m \times n$)	Matriks satuan E_{ij}	$m \times n$
Ruang solusi $A\vec{x} = \vec{0}$	Bergantung pada matriks A	$n - \text{rank}(A)$

Sumber: Axler (2024) dan Lay, Lay, & McDonald (2021)

C. Kebebasan dan Ketergantungan Linear

Konsep kebebasan linear (*linear independence*) dan ketergantungan linear (*linear dependence*) merupakan salah satu konsep fundamental dalam aljabar linear. Konsep ini digunakan untuk menentukan apakah suatu himpunan vektor saling memberikan informasi baru atau justru dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari

vektor lainnya. Pemahaman mengenai kebebasan dan ketergantungan linear sangat penting karena menjadi dasar dalam pembentukan basis, penentuan dimensi ruang vektor, penyelesaian sistem persamaan linear, transformasi linear, serta berbagai aplikasi pada ilmu komputer, statistika, fisika, teknik, dan pembelajaran mesin.

Suatu himpunan vektor dikatakan bebas linear apabila tidak ada satu pun vektor dalam himpunan tersebut yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya. Sebaliknya, himpunan tersebut dikatakan bergantung linear apabila terdapat paling sedikit satu vektor yang dapat dibentuk dari kombinasi linear vektor-vektor lain dalam himpunan tersebut. Dengan kata lain, himpunan vektor bebas linear hanya memiliki solusi trivial ketika disusun dalam persamaan kombinasi linear sama dengan nol, sedangkan himpunan vektor bergantung linear memiliki solusi nontrivial. Secara matematis, misalkan diberikan himpunan vektor

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

Himpunan tersebut bebas linear jika memenuhi

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

hanya memiliki solusi

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Sebaliknya, apabila terdapat paling sedikit satu koefisien yang tidak sama dengan nol sehingga persamaan tersebut tetap terpenuhi, maka himpunan vektor tersebut bergantung linear.

1. Kebebasan Linear

Suatu himpunan vektor disebut bebas linear apabila setiap vektor memberikan kontribusi yang unik terhadap ruang yang dibentuk. Tidak ada redundansi informasi di antara vektor-vektor tersebut. Oleh karena itu, semua vektor diperlukan untuk membangun ruang vektor yang sama. Sebagai contoh, diberikan dua vektor

$$u = (1,2), v = (3,1)$$

Persamaan kombinasi linearnya adalah

$$a(1,2) + b(3,1) = (0,0)$$

Hal ini menghasilkan sistem

$$\begin{aligned} a + 3b &= 0, \\ 2a + b &= 0 \end{aligned}$$

Dari sistem tersebut diperoleh $a = 0$, $b = 0$. Karena hanya terdapat solusi trivial, maka kedua vektor tersebut bebas linear.

2. Ketergantungan Linear

Himpunan vektor dikatakan bergantung linear apabila salah satu vektornya merupakan kombinasi linear dari vektor lainnya. Kondisi ini menunjukkan adanya informasi yang berulang sehingga tidak semua vektor diperlukan untuk membentuk ruang yang sama. Sebagai contoh, diberikan tiga vektor

$$\mathbf{u} = (1,2), \mathbf{v} = (2,4), \mathbf{w} = (3,1)$$

Terlihat bahwa $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$

Akibatnya $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 0$

Persamaan tersebut memiliki solusi nontrivial, yaitu $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$. Oleh karena itu, himpunan vektor tersebut merupakan himpunan yang bergantung linear.

3. Cara Menentukan Kebebasan Linear

Untuk menentukan apakah suatu himpunan vektor bebas atau bergantung linear, dapat digunakan beberapa metode berikut.

- Metode kombinasi linear, yaitu membentuk persamaan kombinasi linear sama dengan vektor nol, kemudian menentukan solusi koefisiennya.
- Metode determinan, khusus untuk himpunan vektor yang membentuk matriks persegi. Jika determinan matriks tidak sama dengan nol, maka vektor-vektor tersebut bebas linear.
- Metode eliminasi Gauss, yaitu mereduksi matriks menjadi bentuk eselon. Banyaknya pivot menunjukkan jumlah vektor yang bebas linear.

Interpretasi geometris kebebasan linear sangat membantu pemahaman konsep ini. Dua vektor tak nol pada bidang dikatakan bebas linear jika dan hanya jika keduanya tidak sejajar, karena jika sejajar maka salah satu vektor dapat dinyatakan sebagai kelipatan skalar dari vektor lainnya. Tiga vektor pada ruang tiga dimensi dikatakan bebas linear jika dan hanya jika ketiganya tidak koplanar (tidak terletak pada satu bidang yang sama), yang dapat diperiksa melalui produk tripel skalar: jika $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0$, maka ketiga vektor bebas linear (Colley, 2021).

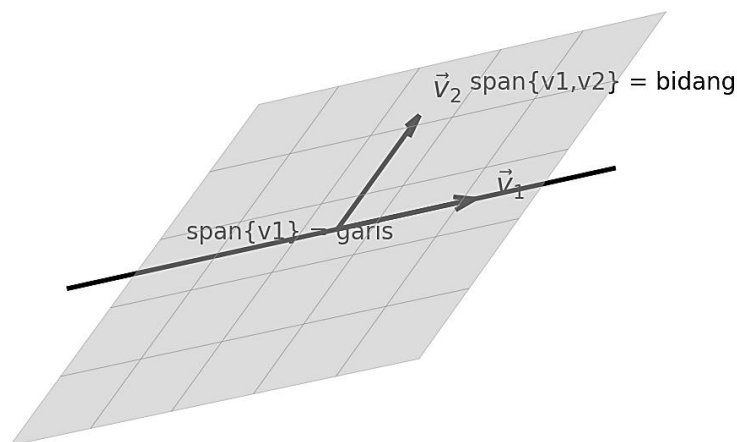
Terdapat pula kriteria praktis untuk memeriksa kebebasan linear sekumpulan vektor menggunakan determinan, khususnya ketika banyaknya vektor sama dengan dimensi ruang yang ditinjau. Sekumpulan n vektor pada ruang $\mathbb{R}^n$ bebas linear jika dan hanya jika determinan matriks yang barisnya (atau kolomnya) adalah vektor-vektor tersebut tidak sama dengan nol (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Kriteria determinan ini memberikan metode komputasional yang efisien untuk memeriksa kebebasan linear tanpa perlu menyelesaikan sistem persamaan linear secara eksplisit, terutama untuk kasus dua dan tiga dimensi yang sering dijumpai dalam geometri analitik.

Untuk kasus yang lebih umum, ketika banyaknya vektor tidak sama dengan dimensi ruang yang ditinjau, kebebasan linear diperiksa melalui eliminasi Gauss terhadap matriks yang barisnya adalah vektor-vektor tersebut, dengan memeriksa apakah *rank* matriks tersebut sama dengan banyaknya vektor (Chapra, 2023). Apabila *rank* matriks lebih kecil daripada banyaknya vektor, maka terdapat setidaknya satu vektor yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya, sehingga himpunan tersebut bergantung linear. Konsep *rank* ini juga berkaitan erat dengan dimensi ruang bentang (*span*) dari himpunan vektor tersebut, sebab *rank* matriks pada dasarnya menyatakan dimensi ruang bentang dari vektor-vektor baris (atau kolom) matriks tersebut, sebuah hubungan.

D. Ruang Bentang dan Transformasi Linear

Ruang bentang atau *span* dari suatu himpunan vektor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ didefinisikan sebagai himpunan seluruh kombinasi linear yang mungkin dibentuk dari vektor-vektor tersebut, dinotasikan $span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n : c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$ (Lay, Lay, & McDonald, 2021). Dapat dibuktikan bahwa ruang bentang dari sembarang himpunan vektor selalu membentuk subruang dari ruang vektor asalnya. Ruang bentang dari satu vektor tak nol pada ruang tiga dimensi berupa garis yang melalui titik asal, sedangkan ruang bentang dari dua vektor tak nol yang tidak sejajar berupa bidang yang melalui titik asal, sebuah fakta yang akan banyak dimanfaatkan pada pembahasan persamaan garis dan bidang.

Gambar 6.1 Bentangan (Span) Satu dan Dua Vektor: Garis dan Bidang



Bentangan dari satu vektor $\vec{v}_1$ berupa garis lurus yang melalui titik asal (ditunjukkan garis tebal), sedangkan bentangan dari dua vektor tak sejajar $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ berupa bidang datar yang melalui titik asal (ditunjukkan area abu-abu). Visualisasi ini menegaskan bahwa dimensi ruang bentang bertambah seiring bertambahnya vektor bebas linear yang digunakan untuk membentuknya (Lay, Lay, & McDonald, 2021).

Transformasi linear (*linear transformation*) adalah suatu fungsi $T: V \rightarrow W$ antara dua ruang vektor yang mempertahankan struktur aljabar ruang vektor, yaitu memenuhi $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ dan $T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$ untuk sembarang vektor $\vec{u}, \vec{v}$ dan skalar k (Axler, 2024). Contoh-contoh transformasi linear yang familiar dalam geometri analitik meliputi rotasi, refleksi, dan penskalaan (dilasi) pada bidang maupun ruang, yang seluruhnya dapat direpresentasikan melalui perkalian matriks terhadap vektor posisi.

Setiap transformasi linear pada ruang berdimensi hingga dapat direpresentasikan secara unik oleh sebuah matriks, yang disebut *matriks transformasi* atau *matriks representasi*, relatif terhadap basis tertentu yang dipilih. Hubungan erat antara transformasi linear dan matriks inilah yang menjadikan aljabar matriks sebagai alat komputasional utama dalam mempelajari transformasi linear, termasuk transformasi koordinat yang telah dibahas pada Bab V (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Konsep-konsep ruang vektor, basis, dan transformasi linear yang dibahas pada bab ini menjadi fondasi teoretis yang akan terus digunakan secara implisit maupun eksplisit pada pembahasan geometri analitik dan kalkulus multivariabel di bab-bab selanjutnya.

Studi Kasus 6.2 Ruang Vektor dalam Sistem Rekomendasi Layanan *Streaming*

Platform layanan *streaming* musik dan film memanfaatkan konsep ruang vektor untuk membangun sistem rekomendasi yang dipersonalisasi bagi setiap pengguna. Setiap pengguna dan setiap item konten (lagu atau film) direpresentasikan sebagai vektor dalam ruang faktor laten (*latent factor space*) berdimensi puluhan hingga ratusan, yang diperoleh melalui teknik faktorisasi matriks terhadap data interaksi pengguna-item (Chapra, 2023). Rekomendasi dihasilkan dengan menghitung kedekatan antara vektor preferensi pengguna dan vektor karakteristik item menggunakan produk titik atau ukuran kesamaan lain, sementara dimensi ruang faktor laten tersebut ditentukan melalui teknik reduksi dimensi yang memanfaatkan konsep basis dan dimensi ruang vektor. Studi kasus ini menunjukkan bagaimana konsep ruang vektor abstrak, basis, dan dimensi yang tampak jauh dari aplikasi sehari-hari sesungguhnya menjadi fondasi matematis bagi teknologi yang digunakan miliaran pengguna platform streaming setiap harinya.

Contoh

Tentukan span dari vektor $\vec{v} = (1, 2, -1)$ pada ruang $\mathbb{R}^3$, dan jelaskan bentuk geometrisnya.

Pembahasan:

Span dari suatu vektor adalah himpunan semua kelipatan skalar dari vektor tersebut. Jika diberikan $\vec{v} = (1, 2, -1)$

Maka Span dari $\vec{v}$ adalah $\text{Span}\{\vec{v}\} = \{c(1, 2, -1) | c \in \mathbb{R}\}$

Dengan mengalikan setiap komponen vektor dengan skalar c , diperoleh

$$\text{Span}\{\vec{v}\} = \{(c, 2c, -c) | c \in \mathbb{R}\}$$

Bentuk parametriknya dapat dituliskan sebagai

$$x = c, y = 2c, z = -c, c \in \mathbb{R}.$$

Secara geometris, span tersebut merupakan sebuah garis lurus yang melalui titik asal $(0, 0, 0)$ dan memiliki arah yang sama dengan vektor $(1, 2, -1)$. Setiap titik pada garis tersebut diperoleh dengan

mengalikan vektor $(1,2,-1)$ dengan suatu bilangan real, baik positif, negatif, maupun nol. Sebagai ilustrasi:

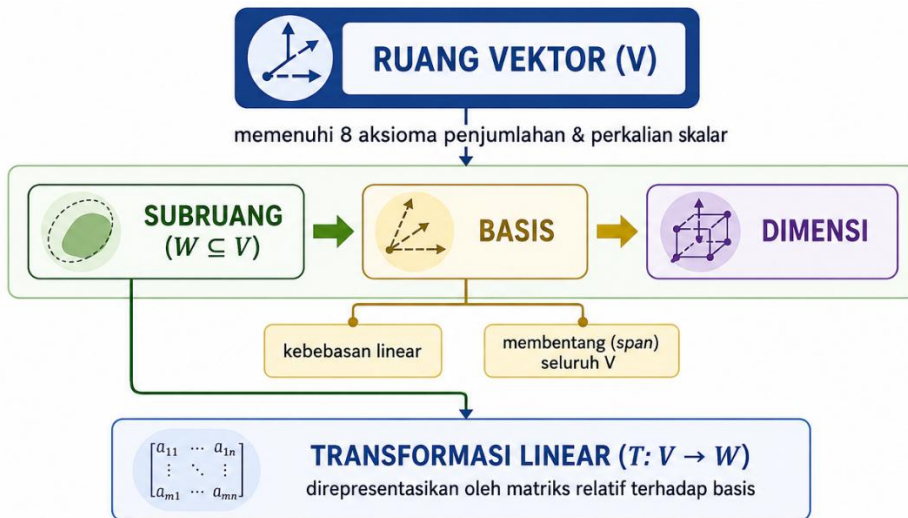
- Untuk $c = 0$, diperoleh titik $(0,0,0)$
- Untuk $c = 1$, diperoleh titik $(1,2,-1)$
- Untuk $c = 2$, diperoleh titik $(2,4,-2)$
- Untuk $c = -1$, diperoleh titik $(-1,-2,1)$

Semua titik tersebut terletak pada garis yang sama sehingga menunjukkan bahwa span hanya menghasilkan satu arah dalam ruang $\mathbb{R}^3$. Oleh karena itu,

$$\text{Span}\{1,2,-1\} = \{(c, 2c, -c) | c \in \mathbb{R}\}$$

dengan dimensi span sama dengan 1, karena basisnya hanya terdiri atas satu vektor yang bebas linear.

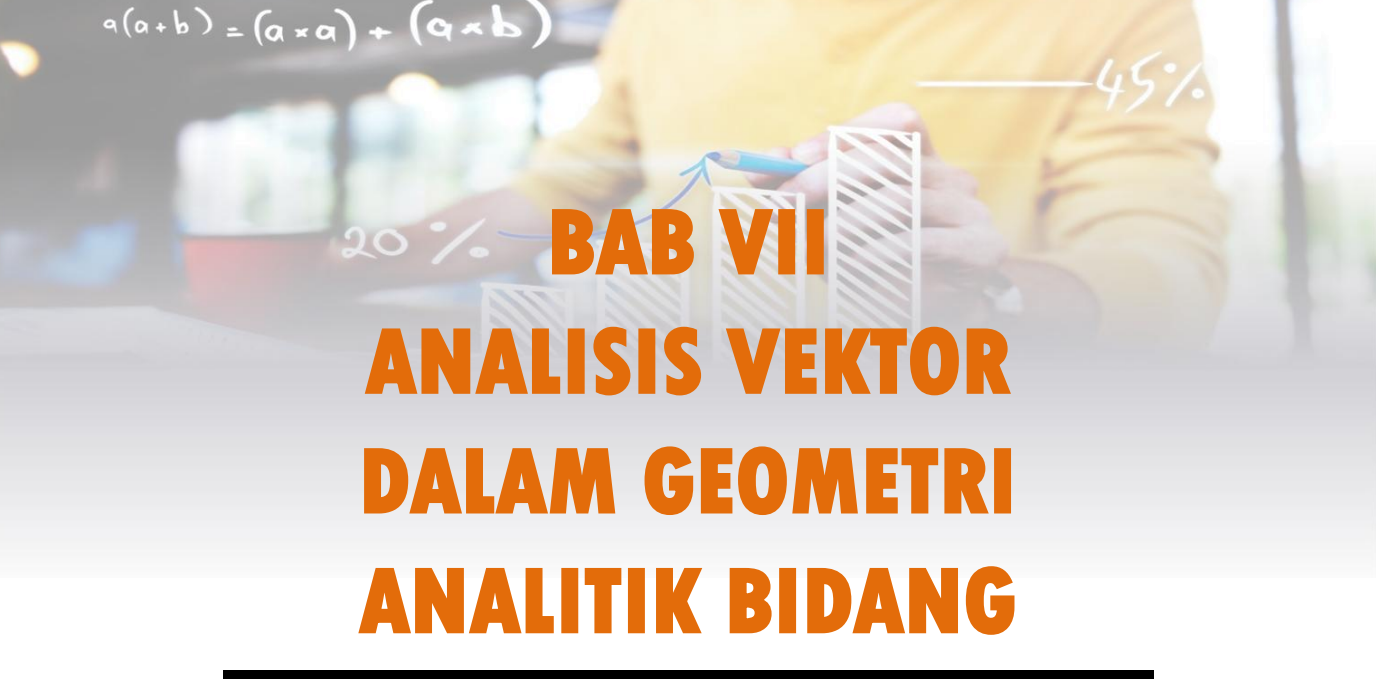
Gambar 6.2 Hierarki Konsep dalam Struktur Ruang Vektor



Gambar diatas memperlihatkan hierarki konseptual dalam struktur ruang vektor, dimulai dari ruang vektor sebagai struktur aksiomatis paling umum, dilanjutkan dengan subruang, basis, dan dimensi sebagai konsep turunan, hingga transformasi linear sebagai fungsi yang menghubungkan antar ruang vektor sambil mempertahankan struktur aljabarnya. Seluruh konsep ini saling terkait dan menjadi fondasi teoretis bagi pengembangan geometri analitik dan kalkulus multivariabel pada bab-bab selanjutnya (Axler, 2024).

Studi Kasus 6.3 Transformasi Linear dalam Koreksi Perspektif Gambar Digital

Aplikasi pemindaian dokumen pada telepon pintar yang mampu "meluruskan" foto dokumen yang diambil dari sudut miring memanfaatkan transformasi linear (lebih tepatnya, transformasi affine yang merupakan perluasan transformasi linear) untuk memetakan empat titik sudut dokumen pada gambar asli menuju posisi persegi panjang yang ideal (Chapra, 2023). Transformasi ini dihitung dengan menentukan matriks transformasi yang memetakan koordinat piksel lama menuju koordinat piksel baru, sedemikian rupa sehingga sifat-sifat linear yaitu $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ dan $T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$ —tetap terpenuhi untuk seluruh piksel dalam gambar, bukan hanya pada keempat titik sudut yang digunakan untuk menentukan matriks transformasi. Studi kasus ini menunjukkan bagaimana konsep transformasi linear yang tampak abstrak menjadi dasar bagi fitur-fitur praktis yang digunakan jutaan pengguna aplikasi pemindaian dokumen setiap harinya, tanpa mereka sadari kompleksitas matematis di baliknya.



BAB VII

ANALISIS VEKTOR DALAM GEOMETRI ANALITIK BIDANG

Setelah membangun fondasi konseptual analisis vektor secara mendalam pada enam bab sebelumnya, mulai bab ini pembahasan beralih pada penerapan analisis vektor dalam geometri analitik, dimulai dari geometri analitik bidang. Pendekatan vektor terhadap geometri analitik menawarkan keunggulan signifikan dibandingkan pendekatan koordinat murni, karena memungkinkan penurunan rumus-rumus geometris secara lebih ringkas, elegan, dan bebas dari ketergantungan terhadap orientasi sumbu koordinat tertentu (Larson & Edwards, 2022). Bab ini membahas persamaan garis dalam bentuk vektor, kedudukan dua garis, perhitungan jarak dan sudut, serta berbagai aplikasi vektor dalam pemecahan masalah geometri bidang.

Biografi Singkat: René Descartes dan Pierre de Fermat

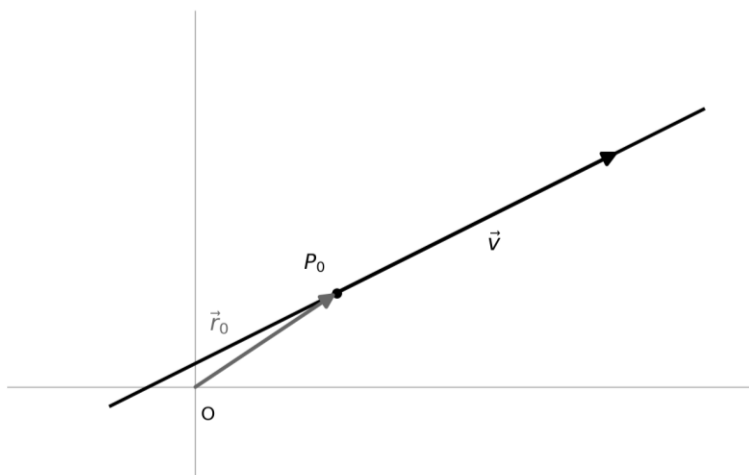
Meskipun geometri analitik biasa diasosiasikan hanya dengan René Descartes, sejarah matematika mencatat bahwa Pierre de Fermat (1607-1665), seorang pengacara Prancis yang mempelajari matematika sebagai hobi, secara independen mengembangkan gagasan serupa mengenai penyatuan aljabar dan geometri pada periode yang hampir bersamaan dengan Descartes, bahkan dalam beberapa aspek tulisannya mendahului publikasi Descartes (Katz & Parshall, 2022). Fermat tidak pernah mempublikasikan karyanya

secara resmi semasa hidupnya, sehingga kontribusinya kurang dikenal luas dibandingkan Descartes, meskipun para sejarawan matematika modern mengakui bahwa kedua tokoh tersebut layak dianggap sebagai perintis bersama geometri analitik. Kisah ini menjadi pengingat bahwa penemuan besar dalam matematika seringkali muncul secara independen dari berbagai tokoh yang bekerja terpisah, sebuah fenomena yang dikenal sebagai penemuan ganda (*multiple discovery*) dalam sejarah sains.

A. Persamaan Garis dalam Bentuk Vektor

Sebuah garis pada bidang dapat ditentukan secara unik melalui sebuah titik yang dilaluinya dan sebuah vektor arah yang menunjukkan orientasi garis tersebut. Apabila garis melalui titik $P_0(x_0, y_0)$ dengan vektor arah $\vec{v} = (a, b)$, maka *persamaan vektor* garis tersebut dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \vec{v}$, dengan $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ adalah vektor posisi titik P_0 , $\vec{r}(t) = (x, y)$ adalah vektor posisi titik sembarang pada garis, dan t adalah parameter real yang bergerak menelusuri seluruh titik pada garis (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Bentuk persamaan ini disebut *persamaan parametrik vektor* garis.

Gambar 7.1 Persamaan Garis dalam Bentuk Vektor pada Bidang



Garis ditentukan oleh vektor posisi $\vec{r}_0$ menuju titik acuan P_0 dan vektor arah $\vec{v}$. Setiap titik pada garis diperoleh melalui $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ untuk suatu nilai parameter t (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Dari persamaan vektor tersebut, dapat diturunkan *persamaan parametrik skalar* garis, yaitu $x = x_0 + at$ dan $y = y_0 + bt$, yang menyatakan koordinat x dan y sebagai fungsi dari parameter t secara terpisah. Apabila parameter t dieliminasi dari kedua persamaan tersebut (dengan asumsi a dan b keduanya tidak nol), diperoleh *persamaan simetris* garis, yaitu $(x-x_0)/a = (y-y_0)/b$, yang selanjutnya dapat disusun ulang menjadi bentuk persamaan linear baku $Ax+By+C=0$ yang lazim dijumpai dalam geometri analitik konvensional (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Ketiga bentuk persamaan ini yaitu vektor, parametrik, dan simetris, pada dasarnya menyatakan informasi geometris yang identik, hanya berbeda dalam cara penyajiannya.

Keunggulan persamaan vektor garis dibandingkan persamaan linear baku terletak pada kemudahannya untuk diperluas ke ruang berdimensi lebih tinggi. Sementara persamaan linear baku $Ax+By+C=0$ secara alami hanya mendeskripsikan garis pada bidang, persamaan vektor $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ dapat langsung diterapkan pada ruang tiga dimensi maupun ruang berdimensi- n tanpa perubahan bentuk, cukup dengan menyesuaikan dimensi vektor $\vec{r}_0$ dan $\vec{v}$ (Colley, 2021). Sifat inilah yang menjadikan pendekatan vektor lebih disukai dalam pembahasan geometri analitik ruang.

Perlu ditegaskan pula bahwa parameter t pada persamaan vektor garis tidak memiliki makna geometris tunggal yang baku; nilai t semata-mata menunjukkan kelipatan vektor arah yang ditambahkan pada titik acuan, sehingga dua parametrisasi berbeda untuk garis yang identik dapat menghasilkan nilai t yang berbeda untuk titik yang sama. Meskipun demikian, dalam konteks tertentu seperti kinematika, parameter t secara alami diinterpretasikan sebagai waktu, sehingga persamaan vektor garis sekaligus mendeskripsikan lintasan gerak lurus beraturan suatu partikel, sebuah interpretasi yang akan diperluas secara umum ketika membahas fungsi vektor (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021).

Perbandingan antara ketiga bentuk persamaan garis yaitu vektor, parametrik skalar, dan simetris juga mengungkap trade-off penting dalam representasi matematis: bentuk vektor paling ringkas dan mudah

digeneralisasi, bentuk parametrik skalar paling mudah digunakan untuk menghitung koordinat titik tertentu pada garis dengan mensubstitusikan nilai t secara langsung, sementara bentuk simetris paling mudah digunakan untuk memeriksa apakah suatu titik tertentu terletak pada garis, cukup dengan mensubstitusikan koordinat titik tersebut dan memeriksa kesamaan rasio (Larson & Edwards, 2022). Pemilihan bentuk representasi yang tepat bergantung pada kebutuhan spesifik permasalahan yang dihadapi, sebuah keterampilan praktis yang akan terus diasah sepanjang pembahasan geometri analitik.

Contoh 7.1

Tentukan persamaan vektor, parametrik, dan simetris garis yang melalui titik $(2, -3)$ dengan vektor arah $(4, 5)$.

Pembahasan:

Diketahui:

- Titik pada garis $P = (2, -3)$
- Vektor arah $v = (4, 5)$

1. Persamaan Vektor

Persamaan vektor suatu garis yang melalui titik $P(x_0, y_0)$ dengan vektor arah (a, b) adalah $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$

Dengan mensubstitusikan data yang diketahui diperoleh

$$\mathbf{r}(t) = (2, -3) + t(4, 5), t \in \mathbb{R}$$

2. Persamaan Parametrik

Dari persamaan vektor diperoleh persamaan parametrik

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -3 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Persamaan Simetris

Untuk menghilangkan parameter t , diperoleh

$$t = \frac{x - 2}{4}$$

dan

$$t = \frac{y + 3}{5}.$$

Karena kedua bentuk tersebut menyatakan parameter yang sama, maka

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{5}.$$

Persamaan simetris tersebut dapat diubah ke bentuk umum dengan melakukan perkalian silang,

$$5(x - 2) = 4(y + 3).$$

Selanjutnya,

$$5x - 10 = 4y + 12,$$

sehingga diperoleh

$$5x - 4y - 22 = 0.$$

Verifikasi

Titik $(2, -3)$ memenuhi persamaan garis karena

$$5(2) - 4(-3) - 22 = 10 + 12 - 22 = 0$$

Selain itu, gradien garis adalah $m = \frac{5}{4}$ yang sesuai dengan perbandingan komponen vektor arah $(4, 5)$. Dengan demikian, persamaan vektor, parametrik, simetris, dan bentuk umum yang diperoleh telah benar.

B. Kedudukan Dua Garis pada Bidang

Dalam geometri analitik, kedudukan dua garis pada bidang menunjukkan hubungan posisi antara dua garis dalam ruang dua dimensi. Kedudukan ini dapat ditentukan dengan membandingkan vektor arah masing-masing garis atau dengan menyelesaikan sistem persamaan yang dibentuk oleh kedua garis tersebut. Analisis kedudukan garis sangat penting dalam berbagai bidang, seperti geometri, teknik sipil, grafika komputer, sistem navigasi, dan pemodelan matematika, karena

membantu menentukan apakah dua lintasan saling bertemu, sejajar, atau bahkan berimpit.

Penentuan kedudukan dua garis $\ell_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t \vec{v}_1$ dan $\ell_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s \vec{v}_2$ dapat dilakukan dengan memeriksa terlebih dahulu apakah vektor arah $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ sejajar, yaitu apakah $\vec{v}_1$ merupakan kelipatan skalar dari $\vec{v}_2$ (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Jika kedua vektor arah tidak sejajar, kedua garis pasti berpotongan pada satu titik, karena pada bidang dua dimensi, dua garis yang tidak sejajar selalu berpotongan.

Apabila vektor arah kedua garis sejajar, langkah selanjutnya adalah memeriksa apakah salah satu titik pada garis pertama juga terletak pada garis kedua. Jika ya, kedua garis berimpit (identik); jika tidak, kedua garis sejajar namun tidak berimpit (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Kriteria ketegaklurusan dua garis pada bidang dapat diperiksa secara langsung menggunakan produk titik antara kedua vektor arahnya: dua garis dikatakan tegak lurus jika dan hanya jika $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Kriteria ini jauh lebih sederhana dibandingkan pendekatan koordinat konvensional yang mengharuskan perhitungan hasil kali gradien kedua garis sama dengan -1, meskipun kedua kriteria tersebut secara matematis ekuivalen (Larson & Edwards, 2022).

Pendekatan vektor juga secara alami menangani kasus garis vertikal, yang seringkali menjadi kasus khusus yang merepotkan dalam pendekatan gradien konvensional, sebab gradien garis vertikal tidak terdefinisi (pembagian dengan nol), sementara vektor arah garis vertikal, misalnya $(0, 1)$, tetap terdefinisi dengan baik dan dapat diproses menggunakan prosedur yang sama seperti garis lainnya (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021).

Tabel 7.1 Tiga Kemungkinan Kedudukan Dua Garis pada Bidang

Kedudukan	Kriteria Vektor Arah	Kriteria Tambahan
Berpotongan	$\vec{v}_1$ tidak sejajar $\vec{v}_2$	Titik potong tunggal, dicari melalui sistem persamaan
Sejajar	$\vec{v}_1$ sejajar $\vec{v}_2$	Titik acuan ℓ_1 TIDAK terletak pada ℓ_2
Berimpit	$\vec{v}_1$ sejajar $\vec{v}_2$	Titik acuan ℓ_1 terletak pada ℓ_2

Sumber: Diolah dari Anton, Bivens, & Davis (2022) dan Purcell, Varberg, & Rigdon (2021)

Pemahaman mengenai kedudukan dua garis menjadi dasar dalam pembahasan geometri analitik yang lebih lanjut, seperti penentuan jarak antara titik dan garis, sudut antara dua garis, persamaan bidang, serta hubungan antara garis dan bidang pada ruang tiga dimensi. Konsep ini juga berperan penting dalam penyelesaian berbagai persoalan matematika terapan yang melibatkan representasi lintasan, arah gerak, maupun pemodelan geometris.

Contoh 7.2

Tentukan kedudukan garis

$$\ell_1: \vec{r} = (1, 2) + t(2, 3) \text{ dan}$$

$$\ell_2: \vec{r} = (4, 1) + s(-3, 2).$$

Pembahasan:

Diketahui:

- Garis ℓ_1 melalui titik $(1, 2)$ dengan vektor arah

$$\mathbf{v}_1 = (2, 3).$$

- Garis ℓ_2 melalui titik $(4, 1)$ dengan vektor arah

$$\mathbf{v}_2 = (-3, 2).$$

Langkah 1. Periksa apakah kedua garis sejajar

Dua garis sejajar apabila vektor arahnya saling berkelipatan.

Diperoleh

$$\frac{2}{-3} \neq \frac{3}{2},$$

sehingga $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ tidak searah. Oleh karena itu, kedua garis **tidak sejajar**, sehingga pada bidang kedua garis pasti **berpotongan**.

Langkah 2. Tentukan titik potong

Persamaan parametrik kedua garis adalah

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases}$$

dan

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 4 - 3s, \\ y = 1 + 2s. \end{cases}$$

Karena titik potong memiliki koordinat yang sama, maka

$$1 + 2t = 4 - 3s$$

dan

$$2 + 3t = 1 + 2s.$$

Diperoleh sistem persamaan

$$2t + 3s = 3,$$

$$3t - 2s = -1.$$

Dengan metode eliminasi,

$$4t + 6s = 6, \quad (\times 2)$$

$$9t - 6s = -3. \quad (\times 3)$$

Menjumlahkan kedua persamaan menghasilkan

$$13t = 3,$$

sehingga

$$t = \frac{3}{13}.$$

Substitusi ke persamaan

$$2t + 3s = 3$$

memberikan

$$2\left(\frac{3}{13}\right) + 3s = 3,$$

$$\frac{6}{13} + 3s = \frac{39}{13},$$

$$3s = \frac{33}{13},$$

$$s = \frac{11}{13}.$$

Langkah 3. Tentukan koordinat titik potong

Substitusi nilai $t = \frac{3}{13}$ ke persamaan garis ℓ_1 :

$$x = 1 + 2 \left(\frac{3}{13} \right) = \frac{19}{13},$$

$$y = 2 + 3 \left(\frac{3}{13} \right) = \frac{35}{13}.$$

Jadi, titik potong kedua garis adalah

$$\left(\frac{19}{13}, \frac{35}{13} \right).$$

Verifikasi

Substitusi $s = \frac{11}{13}$ ke persamaan garis ℓ_2 :

$$x = 4 - 3 \left(\frac{11}{13} \right) = \frac{19}{13},$$

$$y = 1 + 2 \left(\frac{11}{13} \right) = \frac{35}{13}.$$

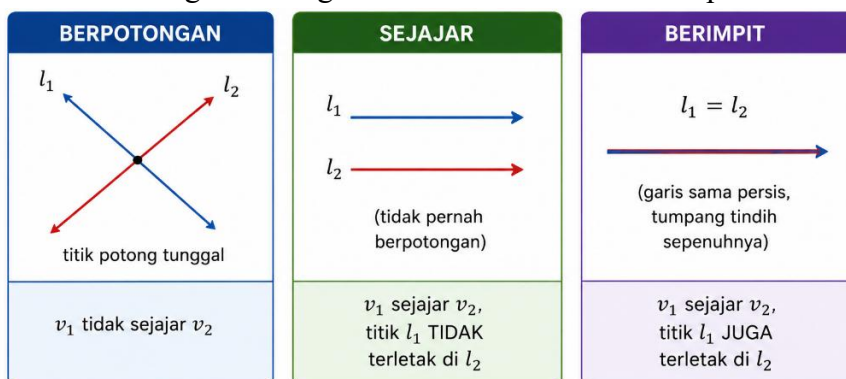
Koordinat yang diperoleh sama dengan hasil dari garis ℓ_1 , sehingga perhitungan telah benar.

Kesimpulan:

Karena vektor arah kedua garis tidak searah dan keduanya memiliki titik yang sama, maka garis ℓ_1 dan ℓ_2 berpotongan di titik

$$\left(\frac{19}{13}, \frac{35}{13} \right).$$

Gambar 7.2 Tiga Kemungkinan Kedudukan Dua Garis pada Bidang



Gambar ini memperlihatkan tiga kemungkinan kedudukan dua garis pada bidang beserta kriteria vektornya. Kedudukan berpotongan terjadi ketika vektor arah kedua garis tidak sejajar. Kedudukan sejajar dan berimpit sama-sama memerlukan vektor arah yang sejajar, namun dibedakan oleh apakah suatu titik pada garis pertama juga terletak pada garis kedua (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Studi Kasus 7.1 Vektor dalam Sistem Navigasi Kapal Laut untuk Menghindari Tabrakan

Sistem navigasi otomatis pada kapal laut modern memanfaatkan persamaan vektor garis untuk memprediksi lintasan kapal lain di sekitarnya dan menentukan apakah lintasan tersebut berpotensi berpotongan dengan lintasan kapal sendiri dalam rentang waktu tertentu. Dengan merepresentasikan lintasan setiap kapal sebagai garis berbasis vektor kecepatan relatif, sistem dapat menghitung titik potong kedua lintasan menggunakan metode yang identik dengan Contoh 7.2, kemudian membandingkan waktu kedatangan masing-masing kapal di titik tersebut untuk menilai risiko tabrakan (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Apabila kedua kapal diprediksi tiba di titik potong pada rentang waktu yang berdekatan, sistem akan memberikan peringatan dini kepada operator kapal. Studi kasus ini menegaskan bahwa perhitungan kedudukan dua garis yang tampak sederhana secara matematis memiliki peran vital dalam keselamatan pelayaran modern.

C. Jarak dan Sudut pada Bidang

Konsep jarak dan sudut pada bidang merupakan salah satu aplikasi penting dalam geometri analitik dan aljabar linear. Melalui representasi vektor, berbagai permasalahan geometri seperti menentukan jarak antara dua titik, jarak titik ke garis, serta besar sudut antara dua vektor dapat diselesaikan secara sistematis menggunakan operasi vektor. Konsep ini banyak diterapkan dalam bidang teknik, fisika, grafika komputer, navigasi, dan analisis data spasial.

Jarak dari suatu titik Q ke suatu garis ℓ : $r \vec{=} r \vec{o} + t v \vec{}$ dapat dihitung secara elegan menggunakan konsep proyeksi vektor. Dengan mendefinisikan vektor $w \vec{=} Q - P_o$, jarak d dari titik Q ke garis ℓ dihitung melalui rumus $d = |w \vec{-} proj_{v \vec{}} w \vec{|}$, yaitu panjang komponen ortogonal $w \vec{}$ terhadap vektor arah garis (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Pada bidang dua dimensi, rumus ini dapat disederhanakan menjadi $d = |w \vec{\times} v \vec{|} / |v \vec{|}$, dengan memanfaatkan interpretasi determinan dua-dua sebagai analog produk silang pada bidang.

Alternatif lain untuk menghitung jarak titik ke garis, khususnya apabila garis dinyatakan dalam bentuk persamaan linear baku $Ax+By+C=0$, adalah menggunakan rumus jarak titik-garis klasik $d = |Ax_l+By_l+C| / \sqrt{(A^2+B^2)}$, dengan (x_l, y_l) adalah koordinat titik Q . Rumus ini dapat diturunkan langsung dari pendekatan vektor dengan mengamati bahwa vektor (A, B) merupakan vektor normal terhadap garis tersebut (Hass, Heil, & Weir, 2022). Sudut antara dua garis pada bidang dihitung melalui sudut antara kedua vektor arahnya, menggunakan rumus $\cos \theta = |v \vec{1} \cdot v \vec{2}| / (|v \vec{1}| |v \vec{2}|)$, dengan nilai mutlak digunakan karena konvensi sudut antara dua garis biasanya diambil sebagai sudut lancip (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Contoh

Hitung jarak titik $Q(3,4)$ ke garis $\ell: \vec{r} = (0,0) + t(1,2)$.

Pembahasan

Diketahui:

- Titik $Q = (3, 4)$.
- Garis ℓ melalui titik $P = (0, 0)$.
- Vektor arah garis

$$\mathbf{v} = (1, 2).$$

Vektor dari titik pada garis menuju titik Q adalah

$$\mathbf{w} = Q - P = (3, 4).$$

Jarak titik ke garis dapat dihitung menggunakan rumus

$$d = \frac{|\mathbf{w} \times \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|},$$

dengan hasil kali silang pada bidang dihitung menggunakan determinan

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (4)(1) = 2.$$

Panjang vektor arah adalah

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Dengan demikian,

$$d = \frac{|2|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894.$$

Jadi, jarak titik $Q(3, 4)$ terhadap garis ℓ adalah

$$d = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894 \text{ satuan.}$$

Verifikasi

Persamaan parametrik garis adalah

$$x = t, \quad y = 2t.$$

Dengan menghilangkan parameter diperoleh

$$y = 2x,$$

atau dalam bentuk umum,

$$2x - y = 0.$$

Menggunakan rumus jarak titik ke garis

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

dengan $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$, serta titik $Q = (3, 4)$, diperoleh

$$d = \frac{|2(3) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894.$$

Nilai yang diperoleh sama dengan hasil menggunakan metode vektor, sehingga perhitungan telah benar.

Kesimpulan:

Jarak titik $Q(3, 4)$ ke garis $\ell : \mathbf{r} = (0, 0) + t(1, 2)$ adalah

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894 \text{ satuan.}$
--

Contoh

Hitung sudut antara dua garis dengan vektor arah (3,4) dan (5,-12).

Pembahasan:

Untuk memperoleh sudut lancip antara dua garis digunakan nilai mutlak pada hasil kali titik, sehingga

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Langkah 1. Hitung hasil kali titik

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= (3)(5) + (4)(-12) \\ &= 15 - 48 \\ &= -33.\end{aligned}$$

Langkah 2. Hitung panjang masing-masing vektor

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

dan

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Langkah 3. Hitung sudut

$$\cos \theta = \frac{|-33|}{5 \times 13} = \frac{33}{65} \approx 0,508.$$

Dengan demikian,

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{33}{65} \right) \approx 59,5^\circ.$$

Jadi, sudut antara kedua garis adalah

$\theta \approx 59,5^\circ.$

Verifikasi

Apabila nilai mutlak tidak digunakan, diperoleh

$$\cos \theta = -\frac{33}{65},$$

sehingga

$$\theta \approx 120,5^\circ.$$

Sudut tersebut merupakan sudut tumpul yang merupakan suplementer dari sudut lancip

$$180^\circ - 120,5^\circ = 59,5^\circ.$$

Karena sudut antara dua garis secara konvensi didefinisikan sebagai sudut terkecil yang dibentuk kedua garis, maka hasil yang digunakan adalah

$$\theta \approx 59,5^\circ.$$

Dengan demikian, perhitungan menggunakan nilai mutlak pada pembilang telah sesuai dengan definisi sudut antara dua garis.

Contoh

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus terhadap garis $r(t) = (1, 2) + t(3, 1)$ dan melalui titik $(4, 5)$.

Pembahasan

Diketahui:

- Garis melalui titik $(1, 2)$.
- Vektor arah garis

$$\mathbf{v} = (3, 1).$$

- Garis yang dicari melalui titik

$$P = (4, 5).$$

Langkah 1. Tentukan vektor arah garis yang tegak lurus

Misalkan vektor arah garis yang dicari adalah

$$\mathbf{u} = (a, b).$$

Karena kedua garis saling tegak lurus, maka hasil kali titik kedua vektor arah harus sama dengan nol, yaitu

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Dengan demikian,

$$3a + b = 0.$$

Salah satu pasangan bilangan yang memenuhi persamaan tersebut adalah

$$a = 1, \quad b = -3.$$

Sehingga dapat dipilih vektor arah

$$\mathbf{u} = (1, -3).$$

Langkah 2. Tentukan persamaan vektor garis

Persamaan vektor garis yang melalui titik $(4, 5)$ dengan vektor arah $(1, -3)$ adalah

$$\mathbf{r}(t) = (4, 5) + t(1, -3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Langkah 3. Tentukan persamaan parametrik

Dari persamaan vektor diperoleh

$$\begin{aligned} x &= 4 + t, \\ y &= 5 - 3t, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Langkah 4. Tentukan persamaan simetris

Menghilangkan parameter t menghasilkan

$$t = x - 4$$

dan

$$t = \frac{5 - y}{3}.$$

Sehingga persamaan simetrisnya adalah

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{5 - y}{3}.$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk yang lebih umum sebagai

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{y - 5}{-3}.$$

Langkah 5. Tentukan persamaan umum

Dari persamaan parametrik,

$$y = 5 - 3(x - 4),$$

sehingga persamaan umumnya adalah

$$y = 5 - 3x + 12 = -3x + 17,$$

atau dalam bentuk umum $Ax + By + C = 0$, diperoleh

$$3x + y - 17 = 0.$$

sehingga

$$y = 17 - 3x.$$

Dalam bentuk umum diperoleh

$$3x + y - 17 = 0.$$

Verifikasi

Vektor arah kedua garis adalah

$$(3, 1)$$

dan

$$(1, -3).$$

Hasil kali titiknya adalah

$$(3)(1) + (1)(-3) = 3 - 3 = 0.$$

Karena hasil kali titik sama dengan nol, kedua garis saling tegak lurus. Selain itu, titik $(4, 5)$ memenuhi persamaan garis

$$3(4) + 5 - 17 = 12 + 5 - 17 = 0.$$

Dengan demikian, persamaan garis yang dicari adalah

$$\mathbf{r}(t) = (4, 5) + t(1, -3)$$

atau dalam bentuk umum

$$3x + y - 17 = 0.$$

D. Aplikasi Vektor dalam Pemecahan Masalah Geometri Bidang

Pendekatan vektor memberikan alat yang sangat efektif untuk membuktikan berbagai teorema geometri klasik secara lebih ringkas dibandingkan pendekatan geometri sintetik tradisional. Sebagai contoh, pembuktian bahwa diagonal-diagonal jajargenjang saling membagi dua sama panjang dapat dilakukan dengan menyatakan titik tengah kedua

diagonal menggunakan vektor posisi titik-titik sudut jajargenjang, kemudian menunjukkan bahwa kedua ekspresi titik tengah tersebut identik (Colley, 2021). Pendekatan semacam ini menghindari kebutuhan akan konstruksi bantu yang seringkali diperlukan dalam pembuktian geometri sintetik.

Aplikasi penting lainnya adalah penentuan titik berat (*centroid*) segitiga menggunakan vektor posisi. Apabila titik-titik sudut segitiga dinyatakan sebagai vektor posisi $\vec{A}$, $\vec{B}$, dan $\vec{C}$, maka titik berat segitiga dapat dihitung secara langsung melalui $\vec{G} = (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})/3$, sebuah rumus yang jauh lebih mudah diingat dan diterapkan dibandingkan pendekatan koordinat konvensional yang memerlukan penurunan persamaan garis-garis median terlebih dahulu (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Penelitian Rahmawati dan Suryadi (2022) menunjukkan bahwa mahasiswa yang terbiasa menggunakan pendekatan vektor dalam menyelesaikan masalah geometri bidang cenderung menunjukkan fleksibilitas berpikir yang lebih tinggi dibandingkan mahasiswa yang hanya terpapar pendekatan koordinat konvensional, karena pendekatan vektor mendorong pemahaman struktural terhadap hubungan antarobjek geometris, bukan sekadar manipulasi simbolik persamaan.

Aplikasi lain yang tak kalah instruktif adalah pembuktian bahwa garis berat (median) suatu segitiga berpotongan pada satu titik yang membagi masing-masing median dengan perbandingan 2:1 dari titik sudut. Dengan menyatakan titik tengah setiap sisi menggunakan rata-rata dua vektor posisi titik sudut yang bersesuaian, dapat ditunjukkan bahwa titik yang terletak pada jarak dua pertiga sepanjang median dari titik sudut menuju titik tengah sisi di hadapannya selalu sama dengan sentroid $\vec{G} = (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})/3$ untuk ketiga median sekaligus, sehingga ketiganya pasti berpotongan pada titik yang sama (Colley, 2021). Pembuktian aljabar vektor semacam ini jauh lebih ringkas dibandingkan pembuktian geometri sintetik klasik yang memerlukan konstruksi tambahan dan penerapan teorema kesebangunan segitiga secara berulang.

Contoh

Buktikan menggunakan vektor posisi bahwa segmen garis yang menghubungkan titik tengah dua sisi segitiga sejajar dengan sisi ketiga

dan panjangnya setengah dari sisi ketiga tersebut (teorema garis tengah segitiga).

Pembahasan

Misalkan suatu segitiga memiliki titik sudut dengan vektor posisi

$$\mathbf{A}, \quad \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}.$$

Titik tengah sisi AB adalah M , sedangkan titik tengah sisi AC adalah N .

Langkah 1. Tentukan vektor posisi titik tengah

Berdasarkan rumus titik tengah, diperoleh

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2},$$

dan

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2}.$$

Langkah 2. Tentukan vektor yang menghubungkan kedua titik tengah

Vektor dari M ke N adalah

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \mathbf{N} - \mathbf{M} \\ &= \frac{\mathbf{A} + \mathbf{C}}{2} - \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{A} + \mathbf{C} - \mathbf{A} - \mathbf{B}}{2} \\ &= \frac{\mathbf{C} - \mathbf{B}}{2}.\end{aligned}$$

Karena

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{C} - \mathbf{B},$$

maka diperoleh

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}.$$

Langkah 3. Tunjukkan bahwa $\overrightarrow{MN}$ sejajar dengan $\overrightarrow{BC}$

Vektor

$$\overrightarrow{MN}$$

merupakan kelipatan skalar positif dari

$$\overrightarrow{BC},$$

yaitu

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}.$$

Karena dua vektor yang saling merupakan kelipatan skalar adalah sejajar, maka

$$\boxed{\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}.$$

Langkah 4. Bandingkan panjang kedua ruas garis

Panjang suatu vektor memenuhi sifat

$$\|k\mathbf{v}\| = |k| \|\mathbf{v}\|.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MN}\| &= \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC}\|.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\boxed{|MN| = \frac{1}{2} |BC|.$$

Kesimpulan

Dari hasil pembuktian diperoleh bahwa

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}.$$

Akibatnya,

1. segmen $\overline{MN}$ sejajar dengan sisi $\overline{BC}$, karena vektor $\overrightarrow{MN}$ merupakan kelipatan skalar positif dari $\overrightarrow{BC}$; dan
2. panjang segmen $\overline{MN}$ adalah setengah dari panjang sisi $\overline{BC}$, yaitu

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|.$$

Dengan demikian, terbukti bahwa segmen garis yang menghubungkan titik tengah dua sisi suatu segitiga sejajar dengan sisi ketiga dan memiliki panjang setengah dari sisi ketiga, sesuai dengan Teorema Garis Tengah Segitiga.

Studi Kasus 7.2 Vektor dalam Perancangan Lintasan Balap

Perancang lintasan balap otomotif memanfaatkan persamaan garis dan kurva berbasis vektor untuk merancang segmen lurus dan tikungan lintasan secara presisi. Setiap segmen lurus lintasan direpresentasikan sebagai persamaan vektor garis, sementara sudut kemiringan tikungan dihitung menggunakan sudut antara vektor arah segmen sebelum dan sesudah tikungan (Larson & Edwards, 2022). Perhitungan jarak titik ke garis juga dimanfaatkan untuk memastikan lebar lintasan konsisten di sepanjang segmen lurus. Studi kasus ini menegaskan bahwa prinsip-prinsip geometri analitik bidang berbasis vektor memiliki aplikasi konkret dalam industri desain infrastruktur olahraga.



BAB VIII

ANALISIS VEKTOR

DALAM GEOMETRI

ANALITIK RUANG

Setelah membahas penerapan analisis vektor dalam geometri analitik bidang pada bab sebelumnya, bab ini memperluas pembahasan ke geometri analitik ruang tiga dimensi. Perluasan ini membawa konsekuensi penting: selain garis, ruang tiga dimensi juga mengandung objek geometris berupa bidang datar, sehingga diperlukan pembahasan tambahan mengenai persamaan bidang dan hubungannya dengan garis. Produk silang, yang telah dibahas pada Bab IV, memainkan peranan sentral dalam bab ini karena menjadi alat utama untuk menentukan vektor normal bidang (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Studi Kasus 8.1 Vektor Normal dalam Rendering Grafis 3D

Dalam grafika komputer, setiap permukaan objek tiga dimensi yang dirender pada layar memerlukan informasi vektor normal pada setiap titik permukaannya untuk menghitung pencahayaan secara realistis, menggunakan model pencahayaan seperti model Phong yang bergantung pada sudut antara vektor normal permukaan dan arah sumber cahaya (Chapra, 2023). Vektor normal pada permukaan poligonal dihitung menggunakan produk silang antara dua vektor sisi poligon tersebut. Objek tiga dimensi yang dirender dalam video game maupun film animasi umumnya tersusun dari ribuan hingga jutaan segitiga kecil, masing-masing

memerlukan perhitungan vektor normal individual agar efek pencahayaan dan bayangan tampak halus dan realistis. Studi kasus ini menegaskan bahwa perhitungan vektor normal yang tampak sederhana pada tingkat konseptual menjadi salah satu operasi paling sering dijalankan dalam industri grafika komputer modern, dieksekusi miliaran kali per detik pada kartu grafis komputer.

A. Persamaan Garis dalam Ruang Tiga Dimensi

Persamaan garis dalam ruang tiga dimensi mengikuti prinsip yang sama dengan persamaan garis pada bidang, yaitu ditentukan oleh sebuah titik yang dilaluinya dan sebuah vektor arah. Apabila garis melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan vektor arah $\vec{v} = (a, b, c)$, maka persamaan vektornya adalah $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \vec{v} = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Perbedaan utama dengan kasus bidang terletak pada fakta bahwa satu persamaan linear tunggal tidak lagi cukup untuk mendeskripsikan garis dalam ruang; garis dalam ruang tiga dimensi memerlukan perpotongan dua bidang, atau secara ekuivalen, dinyatakan melalui bentuk persamaan simetris tiga variabel.

Persamaan simetris garis dalam ruang, yang diperoleh dengan mengeliminasi parameter t dari ketiga persamaan parametrik skalar, dinyatakan sebagai $(x-x_0)/a = (y-y_0)/b = (z-z_0)/c$, dengan asumsi a, b , dan c seluruhnya tidak nol (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Apabila salah satu komponen vektor arah bernilai nol, misalnya $c=0$, maka persamaan simetris harus dituliskan secara terpisah: $(x-x_0)/a = (y-y_0)/b$ dan $z=z_0$, karena pembagian dengan nol tidak terdefinisi.

Penentuan kedudukan dua garis dalam ruang tiga dimensi lebih kompleks dibandingkan kasus bidang, karena selain kemungkinan berpotongan, sejajar, dan berimpit, terdapat kemungkinan keempat yang khas ruang tiga dimensi, yaitu *bersilangan* (*skew lines*), di mana dua garis tidak sejajar namun juga tidak pernah berpotongan karena tidak terletak pada bidang yang sama (Colley, 2021). Untuk memeriksa apakah dua garis bersilangan, dapat digunakan kriteria produk tripel skalar: jika vektor yang menghubungkan titik acuan kedua garis, bersama dengan kedua vektor arah, membentuk produk tripel skalar tak nol, maka kedua garis tersebut bersilangan (tidak koplanar).

Empat kemungkinan kedudukan dua garis dalam ruang berpotongan, sejajar, berimpit, dan bersilangan dapat diringkas melalui dua tahap pemeriksaan berurutan: pertama, memeriksa kesejajaran vektor arah; kedua, apabila tidak sejajar, memeriksa nilai produk tripel skalar untuk menentukan apakah kedua garis koplanar (berpotongan) atau tidak koplanar (bersilangan) (Colley, 2021). Pemeriksaan dua tahap semacam ini menjadi prosedur standar yang dapat diterapkan secara sistematis tanpa perlu visualisasi geometris terlebih dahulu, sebuah keunggulan penting ketika menangani garis-garis dalam ruang berdimensi tinggi yang sulit dibayangkan secara visual.

Contoh 8.1.

Tentukan persamaan simetris garis yang melalui titik $(1, 2, -3)$ dengan vektor arah $(2, -1, 4)$.

Pembahasan:

Persamaan simetris suatu garis di ruang yang melalui titik (x_0, y_0, z_0) dan memiliki vektor arah (a, b, c) diberikan oleh

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Karena seluruh komponen vektor arah $(2, -1, 4)$ tidak nol, maka persamaan simetris garis tersebut adalah

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 3}{4}.$$

Persamaan ini juga dapat dinyatakan sebagai perpotongan dua bidang. Misalkan

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1},$$

maka diperoleh

$$-(x - 1) = 2(y - 2),$$

atau

$$x + 2y - 5 = 0.$$

Selanjutnya, dengan menyamakan

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{z + 3}{4},$$

diperoleh

$$4(x - 1) = 2(z + 3),$$

atau

$$2x - z - 5 = 0.$$

Jadi, garis yang melalui titik $(1, 2, -3)$ dengan vektor arah $(2, -1, 4)$ memiliki persamaan simetris

$$\boxed{\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 3}{4}},$$

atau sebagai perpotongan dua bidang

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x - z - 5 = 0. \end{cases}$$

diperoleh

$$4(x - 1) = 2(z + 3),$$

sehingga

$$2x - z - 5 = 0.$$

Dengan demikian, garis tersebut dapat dinyatakan dalam dua bentuk yang ekuivalen, yaitu

$$\boxed{\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 3}{4}.$$

atau sebagai perpotongan dua bidang

$$\boxed{\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x - z - 5 = 0. \end{cases}}$$

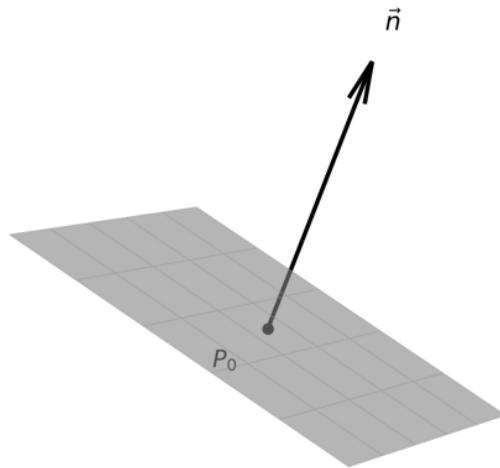
Kedua bentuk tersebut merepresentasikan garis yang sama, yaitu garis yang melalui titik $(1, 2, -3)$ dan memiliki vektor arah $(2, -1, 4)$.

Representasi garis sebagai perpotongan dua bidang ini memiliki makna geometris yang penting: setiap bidang yang memuat garis tersebut, dari tak berhingga banyak bidang yang mungkin melewatinya, dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kedua persamaan bidang yang mendefinisikan garis tersebut, sebuah gagasan yang dikenal sebagai berkas bidang (*pencil of planes*) dalam geometri analitik ruang lanjut (Colley, 2021). Meskipun topik berkas bidang berada di luar cakupan mendalam buku pengantar ini, kesadaran akan keberadaannya membantu pembaca memahami bahwa representasi garis melalui perpotongan dua bidang bukanlah representasi tunggal yang baku, melainkan salah satu dari tak berhingga banyak pasangan bidang yang mungkin dipilih.

B. Persamaan Bidang dalam Ruang

Sebuah bidang datar dalam ruang tiga dimensi dapat ditentukan secara unik melalui sebuah titik yang dilaluinya dan sebuah vektor yang tegak lurus terhadap bidang tersebut, yang disebut *vektor normal* (*normal vector*). Apabila bidang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan vektor normal $\vec{n} = (A, B, C)$, maka persamaan bidang tersebut diturunkan dari syarat bahwa untuk sembarang titik $P(x, y, z)$ pada bidang, vektor $\vec{P_0P}$ harus tegak lurus terhadap $\vec{n}$, yaitu $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$ (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Dari syarat ini diperoleh *persamaan bidang* dalam bentuk $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$, yang dapat disederhanakan menjadi bentuk baku $Ax + By + Cz + D = 0$.

Gambar 8.1 Bidang dengan Vektor Normal dalam Ruang



Bidang datar ditentukan oleh titik acuan P_0 dan vektor normal $\vec{n}$ yang tegak lurus terhadap seluruh vektor yang terletak pada bidang tersebut. Persamaan bidang diturunkan dari syarat $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$ untuk sembarang titik P pada bidang (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Ketika bidang tidak diketahui vektor normalnya secara langsung, melainkan diketahui melalui tiga titik yang tidak segaris, vektor normal dapat ditentukan menggunakan produk silang. Jika bidang melalui titik P , Q , dan R , maka dapat dibentuk dua vektor pada bidang tersebut, yaitu $\vec{u} = \vec{PQ}$ dan $\vec{v} = \vec{PR}$, dan vektor normal bidang diperoleh melalui $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Larson & Edwards, 2022). Metode ini menjadi salah satu penerapan paling penting dari produk silang dalam geometri analitik ruang. Perlu dicatat bahwa urutan pemilihan vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

memengaruhi arah vektor normal yang dihasilkan, karena sifat antikomutatif produk silang: menukar urutan $u^{\rightarrow}$ dan $v^{\rightarrow}$ akan menghasilkan vektor normal yang berlawanan arah, meskipun tetap tegak lurus terhadap bidang yang sama. Kedua pilihan arah normal tersebut sama validnya untuk mendefinisikan persamaan bidang, namun konvensi arah normal (misalnya searah "ke luar" suatu permukaan tertutup) menjadi penting dalam konteks aplikasi seperti perhitungan fluks (Zill & Wright, 2022). Kedudukan dua bidang dalam ruang dapat digolongkan menjadi tiga kemungkinan: berpotongan pada sebuah garis, sejajar, atau berimpit, ditentukan dengan memeriksa kesejajaran kedua vektor normal (Zill & Wright, 2022).

Contoh

Tentukan persamaan bidang yang melalui tiga titik $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, dan $C(0,0,1)$.

Pembahasan:

Langkah pertama adalah membentuk dua vektor yang terletak pada bidang tersebut, yaitu

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0),$$

dan

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1).$$

Vektor normal bidang diperoleh dari hasil kali silang kedua vektor tersebut, yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan titik $A(1, 0, 0)$ dan vektor normal $(1, 1, 1)$, persamaan bidang diperoleh dari bentuk titik-normal

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Substitusi nilai yang diketahui menghasilkan

$$1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$

Menyederhanakan persamaan tersebut diperoleh

$$x - 1 + y + z = 0,$$

atau

$$x + y + z = 1.$$

Jadi, persamaan bidang yang melalui titik $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, dan $C(0, 0, 1)$ adalah

$$x + y + z = 1.$$

Sebagai verifikasi, ketiga titik memenuhi persamaan tersebut, yaitu

- Untuk $A(1, 0, 0)$: $1 + 0 + 0 = 1$.
- Untuk $B(0, 1, 0)$: $0 + 1 + 0 = 1$.
- Untuk $C(0, 0, 1)$: $0 + 0 + 1 = 1$.

Dengan demikian, persamaan bidang yang diperoleh telah benar.

Tabel 8.1 Ringkasan Elemen Penentu Garis dan Bidang dalam Ruang

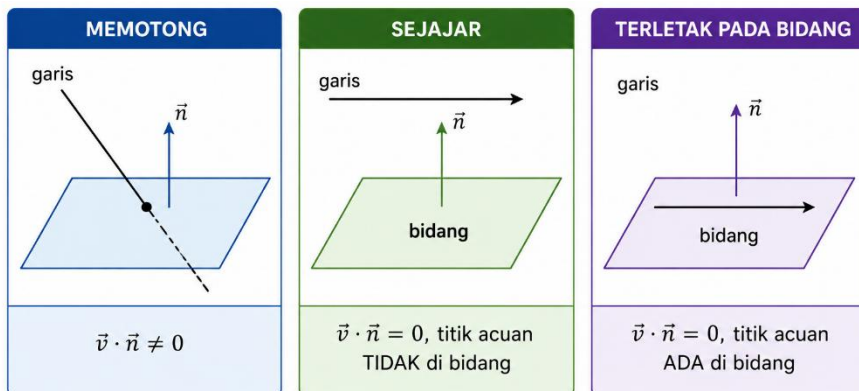
Objek	Elemen Penentu	Bentuk Persamaan
Garis	Satu titik + vektor arah	$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{v}$
Bidang	Satu titik + vektor normal	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Bidang (3 titik)	Tiga titik tak segaris	$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$, lalu gunakan salah satu titik
Garis (perpotongan)	Dua bidang tak sejajar	Sistem dua persamaan bidang

Sumber: Anton, Bivens, & Davis (2022) dan Larson & Edwards (2022)

C. Hubungan Garis dan Bidang dalam Ruang

Hubungan antara sebuah garis dan sebuah bidang dalam ruang tiga dimensi dapat digolongkan menjadi tiga kemungkinan, yaitu garis memotong bidang pada satu titik, garis sejajar dengan bidang, atau garis terletak seluruhnya pada bidang tersebut. Penentuan kedudukan ini dilakukan dengan memeriksa produk titik antara vektor arah garis $\vec{v}$ dengan vektor normal bidang $\vec{n}$ (Colley, 2021). Apabila $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$, garis pasti memotong bidang pada tepat satu titik. Apabila $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, perlu diperiksa apakah titik acuan garis memenuhi persamaan bidang: jika ya, garis terletak pada bidang; jika tidak, garis sejajar dengan bidang tanpa berpotongan (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Gambar 8.2 Tiga Kemungkinan Hubungan Garis dan Bidang dalam Ruang



Gambar memperlihatkan tiga kemungkinan hubungan antara garis dan bidang dalam ruang tiga dimensi. Kriteria pembeda utamanya adalah nilai produk titik antara vektor arah garis dan vektor normal bidang: jika tak nol, garis memotong bidang; jika nol, diperlukan pemeriksaan tambahan pada titik acuan garis (Colley, 2021).

Sudut antara sebuah garis dan sebuah bidang didefinisikan sebagai komplement dari sudut antara vektor arah garis dan vektor normal bidang, dihitung melalui $\sin(\text{sudut garis-bidang}) = |\vec{v} \cdot \vec{n}| / (|\vec{v}| |\vec{n}|)$ (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Jarak titik ke bidang dihitung melalui rumus $d = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ untuk titik (x_1, y_1, z_1) dan bidang $Ax + By + Cz + D = 0$, sebagai analog tiga dimensi dari jarak titik ke garis pada bidang dua dimensi.

Studi Kasus 8.2 Hubungan Garis dan Bidang dalam Perencanaan Jalur Penerbangan

Perencanaan jalur pendekatan pesawat terbang menuju landasan pacu memanfaatkan analisis hubungan antara garis lintasan pesawat dan bidang landasan. Sudut pendekatan pesawat, yang secara operasional disebut *glide slope*, dihitung sebagai sudut antara vektor arah lintasan pesawat dan bidang landasan menggunakan prinsip yang umumnya dijaga pada sudut standar sekitar tiga derajat untuk sebagian besar bandar udara komersial (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Sistem pemandu pendaratan instrumen (*instrument landing system*) secara kontinu memantau posisi pesawat relatif terhadap garis pendekatan ideal, menghitung deviasi menggunakan prinsip jarak titik ke garis dalam ruang tiga dimensi. Studi kasus ini menunjukkan bahwa konsep hubungan garis-bidang yang dibahas pada bab ini menjadi fondasi keselamatan penerbangan komersial modern.

Studi Kasus 8.3 Persamaan Bidang dalam Rekonstruksi Permukaan 3D

Teknologi pemindaian tiga dimensi (*3D scanning*) yang digunakan dalam arkeologi digital dan reverse engineering merekonstruksi permukaan objek fisik dari kumpulan titik-titik hasil pindaian (*point cloud*). Algoritma rekonstruksi mengelompokkan titik-titik yang mendekati satu bidang datar dan menghitung persamaan bidang terbaik menggunakan prinsip vektor normal, umumnya melalui teknik regresi bidang yang meminimalkan jarak tegak lurus seluruh titik terhadap bidang yang dicari (Chapra, 2023). Prinsip jarak titik ke bidang menjadi dasar matematis bagi algoritma tersebut, menunjukkan bahwa rumus-rumus geometri analitik ruang yang tampak klasik tetap relevan dalam teknologi pemindaian digital kontemporer.

D. Jarak dan Sudut dalam Geometri Ruang

Selain jarak titik ke bidang dan sudut antara garis dan bidang, geometri analitik ruang juga memerlukan perhitungan jarak antara dua garis, khususnya untuk kasus garis bersilangan (*skew lines*). Jarak antara dua garis bersilangan ℓ_1 dan ℓ_2 dengan vektor arah $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ dihitung menggunakan rumus $d = |\vec{w} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)| / |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$, dengan $\vec{w}$ adalah vektor yang menghubungkan sembarang titik pada ℓ_1 dengan sembarang titik pada ℓ_2 (Hass, Heil, & Weir, 2022). Rumus ini pada dasarnya menghitung tinggi paralelepipedum yang dibentuk oleh ketiga vektor tersebut, dibagi dengan luas alasnya.

Jarak antara dua bidang sejajar $Ax+By+Cz+D_1=0$ dan $Ax+By+Cz+D_2=0$ dihitung melalui rumus $d = |D_1-D_2| / \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ (Zill & Wright, 2022). Rumus ini dapat diturunkan dengan memilih sembarang titik pada salah satu bidang, kemudian menghitung jaraknya ke bidang lainnya menggunakan rumus jarak titik-bidang yang telah dibahas sebelumnya; karena kedua bidang sejajar dan memiliki koefisien A, B, C yang identik, hasil perhitungan akan selalu sama tidak peduli titik mana yang dipilih pada bidang pertama, sebuah sifat yang menjadi ciri khas bidang-bidang sejajar. Ringkasan menyeluruh terhadap berbagai rumus jarak dan sudut dalam geometri analitik ruang menegaskan kekuatan pendekatan vektor: alih-alih menghafal rumus-rumus terpisah untuk setiap kombinasi objek geometris, pembaca cukup memahami prinsip dasar proyeksi vektor, produk titik, dan produk silang, kemudian menerapkannya secara konsisten pada setiap situasi (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Contoh 8.5

Hitung jarak antara dua garis bersilangan $\ell_1: \vec{r} = (1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$ dan $\ell_2: \vec{r} = (0, 0, 1) + s(0, 1, 1)$.

Pembahasan:

Vektor arah kedua garis adalah

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1).$$

Ambil titik acuan pada masing-masing garis, yaitu

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (0, 0, 1).$$

Vektor yang menghubungkan kedua titik tersebut adalah

$$\mathbf{w} = P_2 - P_1 = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1).$$

Hitung hasil kali silang kedua vektor arah:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1).$$

Selanjutnya,

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (-1)(1) + (0)(-1) + (1)(1) = 0.$$

Karena

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 0,$$

maka kedua garis tersebut saling berpotongan.

maka ketiga vektor $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1$, dan $\mathbf{v}_2$ berada pada satu bidang (koplanar). Oleh karena itu, kedua garis bukan garis bersilangan, sehingga rumus jarak dua garis bersilangan tidak dapat langsung diterapkan. Untuk memastikan hubungan kedua garis, diperiksa apakah keduanya berpotongan. Titik pada masing-masing garis adalah:

$$\ell_1 : (x, y, z) = (1 + t, t, 0),$$

dan

$$\ell_2 : (x, y, z) = (0, s, 1 + s).$$

Agar kedua garis berpotongan harus dipenuhi

$$\begin{cases} 1 + t = 0, \\ t = s, \\ 0 = 1 + s. \end{cases}$$

Dari persamaan pertama diperoleh $t = -1$, dari persamaan kedua $s = -1$, dan persamaan ketiga juga menghasilkan $s = -1$. Karena ketiga persamaan konsisten, kedua garis berpotongan di titik

$$(0, -1, 0).$$

Dengan demikian, jarak antara kedua garis adalah

$$\boxed{0.}$$

Kesimpulan:

Meskipun soal menyatakan kedua garis bersilangan, hasil perhitungan menunjukkan bahwa kedua garis sebenarnya berpotongan di titik $(0, -1, 0)$. Oleh karena itu, jarak antara kedua garis adalah **0 satuan**.

Melengkapi jawaban Contoh 8.2, untuk tiga titik $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$, hasil vektor normal $(12,8,6)$ dapat disederhanakan dengan membagi seluruh komponen dengan faktor persekutuan terbesarnya, yaitu 2, menghasilkan vektor normal yang lebih sederhana $(6,4,3)$, yang tetap menghasilkan bidang yang identik: $6x+4y+3z=12$. Penyederhanaan vektor normal semacam ini adalah praktik yang baik untuk mempermudah interpretasi dan perhitungan lebih lanjut, meskipun tidak wajib dilakukan karena kelipatan skalar vektor normal manapun tetap sah merepresentasikan bidang yang sama.

Konsep garis bersilangan (*skew lines*) diperlukan dalam geometri ruang, namun tidak muncul dalam geometri bidang, karena pada bidang dua dimensi hanya terdapat satu "arah tegak lurus" terhadap sembarang garis, sehingga dua garis yang tidak sejajar pada bidang otomatis akan saling berpotongan di suatu titik. Sebaliknya, dalam ruang tiga dimensi,

terdapat tak berhingga banyak arah yang mungkin tegak lurus terhadap suatu garis, sehingga dua garis dapat memiliki vektor arah yang berbeda (tidak sejajar) namun tetap tidak pernah berpotongan karena keduanya berada pada "ketinggian" atau posisi relatif yang berbeda dalam ruang, tidak terletak pada bidang datar yang sama. Fenomena ini hanya mungkin terjadi ketika terdapat derajat kebebasan tambahan yang disediakan oleh dimensi ketiga, menjadikan garis bersilangan sebagai fenomena yang secara inheren khas ruang tiga dimensi ke atas.



BAB IX

FUNGSI VEKTOR DAN KURVA PARAMETRIK

Bab ini menandai transisi penting dari analisis vektor statis, yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya, menuju kalkulus vektor yang mengkaji perubahan vektor terhadap suatu parameter. Fungsi vektor menjadi alat matematis yang sangat sesuai untuk mendeskripsikan lintasan gerak suatu partikel maupun kurva-kurva dalam ruang, karena memungkinkan koordinat x , y , dan z dinyatakan secara serempak sebagai fungsi dari satu parameter, umumnya waktu (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Bab ini membahas pengertian fungsi vektor, kurva parametrik, turunan fungsi vektor, serta aplikasinya pada gerak dan lintasan.

Biografi Singkat: Isaac Newton dan Konsep Fluxion

Isaac Newton (1642-1727), salah satu pendiri kalkulus bersama Gottfried Leibniz, awalnya mengembangkan gagasan yang setara dengan turunan fungsi vektor melalui konsepnya mengenai *fluxion*, yaitu laju perubahan besaran yang berubah secara kontinu terhadap waktu, sebuah gagasan yang ia kembangkan khusus untuk menganalisis gerak benda dalam mekanika (Katz & Parshall, 2022). Notasi dan terminologi Newton berbeda signifikan dari notasi modern yang digunakan dalam buku ini, namun gagasan intinya, bahwa turunan menyatakan laju perubahan sesaat tetap identik dengan pemahaman kontemporer mengenai turunan fungsi vektor. Newton mengembangkan kalkulus fluxion-nya secara khusus untuk keperluan fisika, terutama dalam menurunkan hukum-hukum gerak dan gravitasi yang dipublikasikan dalam

karya monumentalnya *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* pada tahun 1687, yang hingga kini tetap menjadi salah satu karya paling berpengaruh dalam sejarah sains.

A. Pengertian Fungsi Vektor

Fungsi vektor (vector-valued function) adalah fungsi yang memetakan suatu himpunan bilangan real ke dalam ruang vektor, dituliskan dalam bentuk umum $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ atau ekuivalen $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, dengan f , g , dan h adalah fungsi-fungsi skalar biasa yang disebut *fungsi komponen (component functions)* (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Berbeda dengan fungsi skalar yang telah dipelajari dalam kalkulus dasar, fungsi vektor menghasilkan keluaran berupa vektor untuk setiap nilai masukan parameter t , sehingga daerah hasilnya berupa himpunan titik-titik dalam ruang yang membentuk suatu kurva.

Daerah asal (*domain*) suatu fungsi vektor ditentukan oleh irisan daerah asal masing-masing fungsi komponennya, karena fungsi vektor hanya terdefinisi pada nilai t di mana ketiga fungsi komponen seluruhnya terdefinisi (Hass, Heil, & Weir, 2022). Sebagai contoh, fungsi vektor $\vec{r}(t) = (\sqrt{t}, \ln(t), 1/(t-2))$ memiliki daerah asal berupa irisan dari $t \geq 0$, $t > 0$, dan $t \neq 2$, sehingga daerah asal keseluruhannya adalah $t > 0$ dengan $t \neq 2$.

Konsep limit fungsi vektor didefinisikan secara komponen demi komponen, yaitu $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = (\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t))$, dengan syarat ketiga limit komponen tersebut ada (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Definisi ini secara langsung mengarah pada konsep kekontinuan fungsi vektor: fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dikatakan kontinu di $t=a$ jika dan hanya jika $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$, yang secara ekuivalen berarti ketiga fungsi komponennya kontinu di $t=a$. Pendekatan komponen demi komponen ini menjadi pola umum yang berlaku pada hampir seluruh operasi kalkulus terhadap fungsi vektor, termasuk diferensiasi dan integrasi. Sifat ini menjadikan fungsi vektor secara konseptual lebih sederhana dibandingkan yang terlihat pada pandangan pertama, sebab hampir seluruh teorema kalkulus fungsi skalar termasuk teorema nilai antara dan teorema kekontinuan pada interval tertutup dapat diterapkan pada masing-masing fungsi komponen

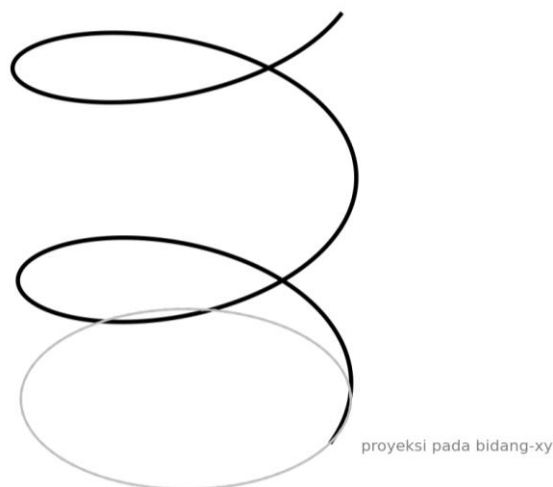
secara independen, kemudian hasilnya digabungkan kembali untuk memperoleh kesimpulan mengenai fungsi vektor secara keseluruhan (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021).

B. Kurva Parametrik pada Bidang dan Ruang

Grafik dari suatu fungsi vektor $\vec{r}(t)$, yaitu himpunan seluruh titik ujung vektor posisi $\vec{r}(t)$ untuk t dalam daerah asalnya, membentuk sebuah kurva dalam ruang yang disebut *kurva parametrik* (*parametric curve*). Representasi parametrik ini menawarkan fleksibilitas yang jauh lebih besar dibandingkan representasi eksplisit $y=f(x)$ atau implisit $F(x,y)=0$, karena mampu mendeskripsikan kurva-kurva yang tidak dapat dinyatakan sebagai fungsi biasa, seperti lingkaran penuh atau kurva yang melintasi dirinya sendiri (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Beberapa kurva parametrik klasik yang sering dijumpai meliputi lingkaran, yang dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t)$; elips, yang dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$; serta *heliks* (*helix*), sebuah kurva ruang tiga dimensi yang dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$, yang secara visual menyerupai spiral yang naik secara linear pada sumbu- z seiring bertambahnya parameter t (Larson & Edwards, 2022).

Gambar 9.1 Kurva Heliks dalam Ruang Tiga Dimensi



Kurva heliks yang dihasilkan oleh fungsi vektor $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ct)$. Proyeksi kurva pada bidang- xy (garis putus-putus) berupa lingkaran berjari-jari a , sementara komponen ketiga ct menyebabkan

kurva naik secara linear seiring bertambahnya parameter t . Kurva jenis ini banyak dijumpai dalam pemodelan struktur molekul DNA, pegas, dan lintasan partikel bermuatan dalam medan magnet seragam (Larson & Edwards, 2022).

Penting untuk dipahami bahwa satu kurva geometris dapat memiliki lebih dari satu representasi parametrik. Sebagai contoh, lingkaran satuan dapat dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ untuk $t \in [0, 2\pi)$, tetapi juga dapat dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ untuk $t \in [0, \pi)$, yang menelusuri lingkaran yang sama namun dengan kecepatan sudut dua kali lipat (Colley, 2021). Fenomena ini menunjukkan bahwa parametrisasi bukan hanya menentukan bentuk geometris kurva, tetapi juga menentukan bagaimana kurva tersebut ditelusuri, termasuk arah dan kecepatan penelusurannya.

Kurva parametrik juga dapat mendeskripsikan bentuk-bentuk yang jauh lebih kompleks dibandingkan lingkaran, elips, dan heliks, misalnya kurva sikloid yang dihasilkan oleh titik pada tepi roda yang menggelinding, dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, atau kurva Lissajous yang dihasilkan dari superposisi dua gerak osilasi tegak lurus dengan frekuensi berbeda, sering dijumpai dalam visualisasi sinyal pada osiloskop (Hass, Heil, & Weir, 2022). Keragaman bentuk kurva yang dapat dihasilkan oleh representasi parametrik inilah yang menjadikannya alat yang jauh lebih fleksibel dibandingkan representasi fungsi eksplisit maupun implisit dalam mendeskripsikan fenomena geometris dan fisis yang kompleks.

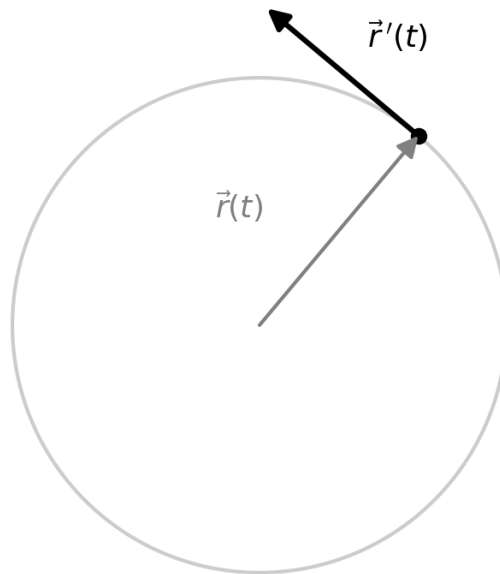
C. Turunan Fungsi Vektor

Turunan suatu fungsi vektor $\vec{r}(t)$ didefinisikan secara analog dengan turunan fungsi skalar, yaitu melalui limit hasil bagi selisih. Dalam praktiknya, turunan fungsi vektor dihitung secara komponen demi komponen, yaitu $\vec{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$, sehingga aturan-aturan diferensiasi fungsi skalar yang telah dikenal dapat diterapkan langsung pada setiap komponen (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Interpretasi geometris turunan fungsi vektor sangat penting: apabila $\vec{r}(t)$ menyatakan lintasan suatu partikel, maka $\vec{r}'(t)$ menyatakan *vektor kecepatan* (*velocity vector*) partikel tersebut pada saat t , yang

arahnya menyinggung kurva lintasan dan besarnya menyatakan laju (*speed*) partikel, yaitu $|\vec{r}'(t)|$ (Griffiths & Inglefield, 2023).

Gambar 9.2 Vektor Kecepatan Menyinggung Kurva Parametrik



Vektor kecepatan $\vec{r}'(t)$ pada suatu titik kurva parametrik selalu menyinggung kurva pada titik tersebut, arahnya searah dengan arah penelusuran kurva. Pada kurva lingkaran, vektor kecepatan senantiasa tegak lurus terhadap vektor posisi $\vec{r}(t)$, sebuah fakta yang dapat dibuktikan melalui $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$ ketika $|\vec{r}(t)|$ konstan (Griffiths & Inglefield, 2023).

Fakta geometris ini memiliki interpretasi fisis penting dalam gerak melingkar: percepatan sentripetal, yang bertanggung jawab menjaga partikel tetap bergerak pada lintasan melingkar, senantiasa mengarah menuju pusat lintasan (berlawanan arah dengan vektor posisi radial), sedangkan vektor kecepatan senantiasa menyinggung lintasan secara tegak lurus terhadap arah radial tersebut. Hubungan ortogonalitas antara vektor posisi dan vektor kecepatan pada gerak melingkar ini merupakan kasus khusus yang sangat penting dalam mekanika, dan akan digunakan kembali ketika menurunkan rumus percepatan sentripetal $a = v^2/r$ pada pembahasan fisika gerak melingkar beraturan.

Turunan kedua fungsi vektor, $\vec{r}''(t)$, menyatakan *vektor percepatan* (*acceleration vector*) partikel. Kalkulus vektor menyediakan

sejumlah aturan diferensiasi khusus, di antaranya $d/dt[u \vec{v}(t) \cdot v \vec{v}(t)] = u \vec{v}(t) \cdot v \vec{v}(t) + u \vec{v}(t) \cdot v \vec{v}(t)$ untuk produk titik, dan $d/dt[u \vec{v}(t) \times v \vec{v}(t)] = u \vec{v}(t) \times v \vec{v}(t) + u \vec{v}(t) \times v \vec{v}(t)$ untuk produk silang, yang keduanya merupakan analog aturan hasil kali dalam kalkulus fungsi skalar (Zill & Wright, 2022). Perlu diperhatikan bahwa untuk produk silang, urutan faktor harus dipertahankan karena sifat antikomutatifnya.

Studi Kasus 9.1 Turunan Fungsi Vektor dalam Pelacakan Satelit

Stasiun pengendali satelit memanfaatkan turunan fungsi vektor untuk memantau kecepatan dan percepatan satelit sepanjang orbitnya secara real-time. Posisi satelit direpresentasikan sebagai fungsi vektor $\vec{r}(t)$ terhadap waktu, sementara vektor kecepatan $\vec{v}(t)$ dan percepatan $\vec{a}(t)$ dihitung secara kontinu untuk memverifikasi bahwa satelit tetap berada pada orbit yang direncanakan (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Ketika percepatan yang terukur menyimpang dari nilai yang diprediksi berdasarkan hukum gravitasi Newton, hal ini dapat mengindikasikan gangguan eksternal seperti tekanan radiasi matahari atau hambatan atmosfer residual, yang kemudian dikompensasi melalui manuver pendorong kecil pada satelit. Studi kasus ini menegaskan bahwa turunan fungsi vektor bukan sekadar konsep matematis abstrak, melainkan alat pemantauan operasional yang digunakan secara harian dalam industri antariksa.

Tabel 9.1 Interpretasi Fisis Turunan Fungsi Vektor Posisi

Orde Turunan	Notasi	Interpretasi Fisis
Fungsi asal	$\vec{r}(t)$	Posisi partikel pada saat t
Turunan pertama	$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$	Kecepatan (arah tangen, laju = $\ \vec{v}(t)\ $)
Turunan kedua	$\vec{r}''(t) = \vec{a}(t)$	Percepatan (perubahan kecepatan)
Integral Kecepatan	$\int \vec{r}'(t)dt = \vec{r}(t) + \vec{c}$	Mengembalikan fungsi posisi dari kecepatan

Integral Laju	$s = \int_a^b \ r'(t)\ dt$	Panjang busur lintasan yang ditempuh partikel dari $t=a$ hingga $t=b$
---------------	-----------------------------	---

Sumber: Griffiths & Inglefield (2023) dan Hass, Heil, & Weir (2022)

D. Aplikasi Fungsi Vektor pada Gerak dan Lintasan

Salah satu aplikasi paling penting fungsi vektor adalah dalam mendeskripsikan gerak peluru (*projectile motion*) dalam mekanika klasik. Dengan mengabaikan hambatan udara, posisi suatu peluru yang ditembakkan dengan kecepatan awal $\vec{v}_0$ di bawah pengaruh percepatan gravitasi $\vec{g} = (0, 0, -g)$ dinyatakan sebagai $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + (1/2)\vec{g} t^2$, yang diperoleh dengan mengintegrasikan vektor percepatan konstan sebanyak dua kali (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022).

Konsep *panjang busur* (*arc length*) suatu kurva parametrik juga merupakan aplikasi penting turunan fungsi vektor. Panjang busur kurva $\vec{r}(t)$ dari $t=a$ hingga $t=b$ dihitung melalui integral $L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$, yang secara intuitif menjumlahkan laju partikel sepanjang lintasan terhadap waktu untuk memperoleh total jarak tempuh (Hass, Heil, & Weir, 2022). Rumus panjang busur ini menjadi dasar bagi konsep parametrisasi ulang kurva berdasarkan panjang busur (*arc length parametrization*), yang berguna dalam geometri diferensial untuk mendefinisikan besaran-besaran intrinsik kurva seperti kelengkungan (*curvature*) yang tidak bergantung pada parametrisasi tertentu yang dipilih. Parametrisasi berdasarkan panjang busur memastikan bahwa laju penelusuran kurva selalu bernilai satu, yaitu $|\vec{r}'(s)|=1$ untuk parameter panjang busur s , sebuah sifat yang menyederhanakan banyak rumus dalam geometri diferensial kurva. Fungsi vektor dan kurva parametrik juga banyak diterapkan dalam grafika komputer, khususnya melalui kurva Bézier dan B-spline yang digunakan untuk memodelkan bentuk-bentuk halus pada permukaan objek digital, di mana turunan fungsi vektor digunakan untuk menghitung arah tangen kurva pada setiap titik (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023).

Contoh

Sebuah peluru ditembakkan dengan kecepatan awal $\vec{v}_0 = (20, 0, 15)$ m/s dari titik asal, dengan percepatan gravitasi $g = 9,8$ m/s². Tentukan fungsi posisi peluru dan tinggi maksimum yang dicapai.

Pembahasan:

Fungsi posisi gerak peluru diperoleh dari persamaan gerak lurus berubah beraturan dalam bentuk vektor,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Karena peluru ditembakkan dari titik asal, maka

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0).$$

Substitusi nilai yang diketahui menghasilkan

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (0, 0, 0) + (20, 0, 15)t + \frac{1}{2}(0, 0, -9,8)t^2 \\ &= (20t, 0, 15t - 4,9t^2). \end{aligned}$$

Dengan demikian, fungsi posisi peluru adalah

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (20t, 0, 15t - 4,9t^2).}$$

Komponen kecepatan diperoleh dengan menurunkan fungsi posisi terhadap waktu,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (20, 0, 15 - 9,8t).$$

Tinggi maksimum dicapai ketika komponen kecepatan vertikal sama dengan nol, yaitu

$$15 - 9,8t = 0.$$

Sehingga,

$$t = \frac{15}{9,8} \approx 1,53 \text{ detik.}$$

Substitusikan nilai tersebut ke fungsi tinggi

$$z(t) = 15t - 4,9t^2,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} z(1,53) &= 15(1,53) - 4,9(1,53)^2 \\ &\approx 22,95 - 11,47 \\ &\approx 11,48 \text{ meter.} \end{aligned}$$

Jadi, tinggi maksimum yang dicapai peluru adalah

11,48 meter.

Contoh ini menunjukkan bahwa fungsi vektor mampu merepresentasikan gerak peluru secara lengkap dalam satu persamaan. Komponen horizontal (x) bergerak dengan kecepatan konstan, sedangkan komponen vertikal (z) dipengaruhi oleh percepatan gravitasi sehingga membentuk lintasan parabola. Pendekatan ini memudahkan analisis posisi, kecepatan, waktu mencapai puncak, dan tinggi maksimum secara sistematis.



BAB X

MEDAN VEKTOR DAN DIFERENSIASI VEKTOR

Setelah membahas fungsi vektor yang bergantung pada satu parameter skalar pada bab sebelumnya, bab ini memperkenalkan konsep yang lebih umum, yaitu medan skalar dan medan vektor, yang masing-masing bergantung pada posisi dalam ruang. Bab ini juga membahas tiga operator diferensial vektor yang paling fundamental dalam kalkulus vektor yaitu gradien, divergensi, dan *curl* yang menjadi bahasa formal bagi hampir seluruh hukum fisika klasik, khususnya elektromagnetisme dan mekanika fluida (Griffiths & Inglefield, 2023).

Biografi Singkat: James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879), seorang fisikawan Skotlandia, merumuskan keempat persamaan elektromagnetik yang menyatukan listrik, magnet, dan optik ke dalam satu kerangka teori tunggal, sebuah pencapaian yang oleh banyak fisikawan dianggap sebagai salah satu pencapaian terbesar dalam sejarah fisika. Menariknya, persamaan Maxwell orisinal dituliskan dalam bentuk dua puluh persamaan komponen yang rumit, jauh sebelum notasi vektor modern, termasuk operator divergensi dan *curl* yang dibahas pada bab ini dikembangkan oleh Gibbs dan Heaviside pada dekade-dekade setelahnya (Katz & Parshall, 2022). Oliver Heaviside secara khusus dikenal karena upayanya menyederhanakan dan meringkas persamaan Maxwell menjadi bentuk empat persamaan vektor yang jauh lebih elegan dan dikenal luas hingga saat ini, sebuah proses

penyederhanaan notasi yang mencerminkan kembali tema sentral yang telah dibahas sejak Bab I mengenai evolusi notasi vektor.

A. Konsep Medan Skalar dan Medan Vektor

Medan skalar (*scalar field*) adalah fungsi yang memetakan setiap titik dalam suatu daerah ruang ke sebuah bilangan real, dituliskan sebagai $f(x,y,z)$ atau $f(P)$ untuk titik P dalam ruang. Contoh medan skalar yang familiar meliputi medan suhu dalam suatu ruangan, medan tekanan udara pada atmosfer, dan medan potensial listrik di sekitar muatan (Kreyszig, 2021). Secara visual, medan skalar dua dimensi dapat divisualisasikan melalui kurva-kurva ketinggian (*level curves*) atau kontur, sedangkan medan skalar tiga dimensi divisualisasikan melalui permukaan-permukaan ketinggian (*level surfaces*), yaitu himpunan titik-titik yang memiliki nilai fungsi sama.

Medan vektor (*vector field*), berbeda dengan medan skalar, adalah fungsi yang memetakan setiap titik dalam suatu daerah ruang ke sebuah vektor, dituliskan sebagai $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, dengan P , Q , dan R adalah fungsi-fungsi skalar yang disebut fungsi komponen medan vektor (Colley, 2021). Contoh medan vektor yang lazim dijumpai dalam fisika meliputi medan gravitasi, medan listrik, medan magnet, dan medan kecepatan aliran fluida, di mana setiap titik dalam ruang dikaitkan dengan sebuah vektor yang menyatakan besar dan arah gaya atau kecepatan pada titik tersebut.

Visualisasi medan vektor umumnya dilakukan melalui penggambaran sejumlah representatif vektor pada berbagai titik dalam daerah yang ditinjau, atau melalui garis medan (*field lines*), yaitu kurva-kurva yang di setiap titiknya bersinggungan dengan arah medan vektor pada titik tersebut. Garis medan magnet di sekitar magnet batang dan garis medan listrik di sekitar muatan titik merupakan contoh visualisasi garis medan yang sangat dikenal dalam fisika dasar (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Kerapatan garis medan pada suatu daerah biasanya merepresentasikan kekuatan medan pada daerah tersebut, dengan garis yang lebih rapat menunjukkan medan yang lebih kuat. Sebagai analogi, semakin rapat garis kontur pada peta topografi, semakin curam medan yang direpresentasikan, sebuah prinsip visual yang identik berlaku pada

garis medan vektor: kerapatan yang tinggi mengindikasikan intensitas medan yang besar pada daerah tersebut (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022).

Medan vektor dapat digolongkan menjadi beberapa kategori berdasarkan sifat-sifat tertentu, di antaranya medan konservatif (*conservative field*), yaitu medan vektor yang dapat dinyatakan sebagai gradien dari suatu medan skalar (disebut fungsi potensial), dan medan *solenoidal* (*solenoidal field*), yaitu medan vektor yang divergensinya sama dengan nol di seluruh titik dalam daerahnya (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Klasifikasi ini memiliki makna fisis yang penting: medan gravitasi dan medan listrik statik merupakan medan konservatif, sedangkan medan magnet merupakan medan solenoidal, sebuah fakta yang tercermin langsung dalam persamaan Maxwell. Sebagian medan vektor, khususnya di alam nyata, dapat memiliki kedua sifat sekaligus (baik konservatif maupun solenoidal) atau tidak memiliki keduanya sama sekali, tergantung pada karakteristik divergensi dan *curl*-nya masing-masing, sebuah klasifikasi yang akan diperjelas secara lebih formal melalui perhitungan eksplisit.

Studi Kasus 10.1 Medan Suhu dalam Pemodelan Cuaca

Peramalan cuaca modern bergantung pada pemodelan medan skalar suhu, tekanan, dan kelembapan atmosfer sebagai fungsi posisi tiga dimensi dan waktu. Peta cuaca yang menampilkan garis isobar (garis tekanan sama) dan isotherm (garis suhu sama) pada dasarnya adalah visualisasi kurva ketinggian dari medan skalar tekanan dan suhu (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Medan vektor angin, yang menyatakan kecepatan dan arah pergerakan udara pada setiap titik, dipadukan dengan medan skalar tekanan melalui hubungan gradien: angin cenderung bergerak dari daerah bertekanan tinggi menuju daerah bertekanan rendah, searah negatif gradien tekanan. Model prediksi cuaca numerik modern menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang melibatkan medan-medan ini secara simultan pada jutaan titik grid di seluruh atmosfer bumi.

B. Operator Gradien (Gradient)

Gradien (*gradient*) suatu medan skalar $f(x,y,z)$ yang memiliki turunan parsial didefinisikan sebagai medan vektor yang menunjukkan arah pertambahan nilai fungsi paling cepat beserta besar laju perubahannya. Gradien dinyatakan dengan:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

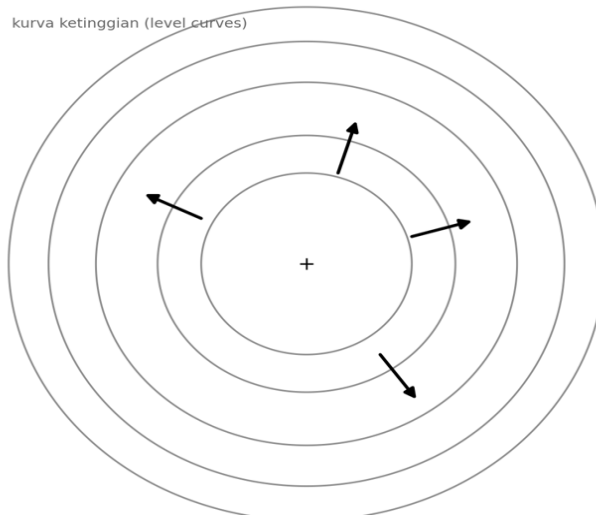
dengan setiap komponennya merupakan turunan parsial fungsi f terhadap masing-masing variabel bebas (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Vektor gradien selalu tegak lurus terhadap permukaan level $f(x,y,z)=c$ pada suatu titik, sehingga memiliki peran penting dalam optimasi, analisis medan potensial, serta berbagai aplikasi fisika dan teknik.

Simbol ∇ (dibaca *nabla* atau *del*) merupakan operator diferensial vektor yang dalam koordinat Kartesius dinyatakan sebagai

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Operator ini menjadi dasar bagi tiga operator utama dalam kalkulus vektor, yaitu gradien (∇f), divergensi ($\nabla \cdot \mathbf{F}$), dan curl ($\nabla \times \mathbf{F}$). Ketiga operator tersebut digunakan untuk menganalisis perubahan fungsi skalar maupun medan vektor, sehingga menjadi konsep fundamental dalam matematika terapan, elektromagnetisme, mekanika fluida, dan berbagai cabang ilmu teknik.

Gambar 10.1 Gradien Tegak Lurus terhadap Kurva Ketinggian



Kurva-kurva abu-abu menunjukkan kurva ketinggian (*level curves*) medan skalar $f(x,y)=x^2+y^2$, sementara anak panah hitam menunjukkan vektor gradien pada beberapa titik. Gradien senantiasa tegak lurus terhadap kurva ketinggian dan menunjuk ke arah kenaikan nilai fungsi yang paling cepat (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021).

Interpretasi geometris dan fisis gradien memiliki dua aspek penting. Pertama, gradien ∇f pada suatu titik menunjukkan arah kenaikan nilai fungsi f yang paling cepat pada titik tersebut, dan besarnya $|\nabla f|$ menyatakan laju kenaikan maksimum tersebut (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Kedua, gradien pada suatu titik selalu tegak lurus terhadap permukaan ketinggian (*level surface*) fungsi f yang melalui titik tersebut, sebuah sifat yang menjadi dasar bagi penentuan bidang singgung permukaan, sebagaimana akan dibahas pada Bab XI. Kedua sifat ini menjadikan gradien sebagai alat yang sangat penting dalam optimasi fungsi multivariabel.

Gradien memenuhi sejumlah sifat aljabar yang analog dengan turunan fungsi satu variabel, di antaranya sifat linearitas $\nabla(af+bg) = a\nabla f + b\nabla g$ untuk sembarang konstanta a dan b , serta aturan hasil kali $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ (Zill & Wright, 2022). Dalam fisika, gradien medan potensial (dengan tanda negatif) menghasilkan medan gaya konservatif, sebagaimana dinyatakan dalam hubungan $\vec{F} = -\nabla U$, dengan U adalah fungsi energi potensial.

Contoh

Diketahui medan skalar $f(x,y,z) = x^2y + yz^3$. Tentukan gradien f dan hitung nilainya pada titik $(1,2,-1)$.

Pembahasan:

Turunan parsial fungsi terhadap masing-masing variabel adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3yz^2.$$

Dengan demikian, gradien fungsi diberikan oleh

$$\nabla f = (2xy, x^2 + z^3, 3yz^2).$$

Selanjutnya, substitusikan titik $(1, 2, -1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, -1) &= 2(1)(2) = 4, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, -1) &= 1^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) &= 3(2)(-1)^2 = 6. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\nabla f(1, 2, -1) = (4, 0, 6).$$

Besar vektor gradien adalah

$$\begin{aligned}\|\nabla f(1, 2, -1)\| &= \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{16 + 0 + 36} \\ &= \sqrt{52} \\ &= 2\sqrt{13}.\end{aligned}$$

Jawaban:

Gradien fungsi adalah

$$\nabla f = (2xy, x^2 + z^3, 3yz^2)$$

dan pada titik $(1, 2, -1)$,

$$\nabla f(1, 2, -1) = (4, 0, 6).$$

Arah kenaikan tercepat fungsi di titik tersebut adalah searah vektor $(4, 0, 6)$, sedangkan laju kenaikan maksimumnya adalah

$$\|\nabla f(1, 2, -1)\| = 2\sqrt{13}.$$

C. Divergensi dan *Curl*

Divergensi (*divergence*) suatu medan vektor $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ didefinisikan sebagai medan skalar yang diperoleh dari hasil kali titik antara operator nabla dan medan vektor, yaitu:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

yaitu hasil kali titik antara operator nabla dengan medan vektor (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Nilai divergensi menunjukkan besarnya laju aliran yang keluar atau masuk pada suatu titik dalam medan vektor (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Dalam interpretasi fisika, apabila $\vec{F}$ menyatakan medan kecepatan fluida, maka divergensi menyatakan laju perubahan volume fluida per satuan volume di sekitar titik tersebut. Divergensi bernilai positif menunjukkan adanya sumber (*source*) aliran, divergensi bernilai negatif menunjukkan adanya

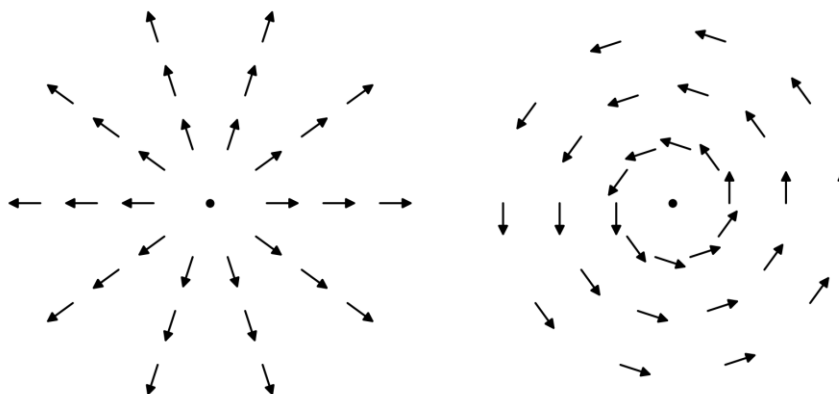
daerah serapan (*sink*), sedangkan divergensi bernilai nol mengindikasikan tidak terdapat perubahan volume lokal sehingga aliran bersifat tak termampatkan (*incompressible flow*).

Curl suatu medan vektor $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ didefinisikan sebagai medan vektor baru yang dihitung melalui hasil kali silang antara operator nabla dengan medan vektor, $\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$, dengan rumus komponen

$$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Curl mengukur kecenderungan suatu medan vektor untuk berotasi di sekitar suatu titik (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Dalam interpretasi fisika, apabila $\vec{F}$ merepresentasikan medan kecepatan fluida, maka curl menunjukkan arah sumbu rotasi lokal sesuai kaidah tangan kanan, sedangkan besar vektornya menyatakan intensitas atau kekuatan rotasi. Nilai curl yang sama dengan nol menunjukkan bahwa medan tersebut bersifat irrotasional (*irrotational field*), sehingga tidak memiliki kecenderungan berputar di sekitar titik yang ditinjau.

Gambar 10.2 Perbandingan Divergensi (Sumber) dan *Curl* (Rotasi)



Gambar kiri menunjukkan medan vektor dengan divergensi positif, di mana seluruh vektor mengarah keluar dari titik pusat, mengindikasikan titik tersebut sebagai sumber aliran. Diagram kanan menunjukkan medan vektor dengan *curl* tidak nol, di mana vektor-vektor tersusun mengikuti pola rotasi di sekitar titik pusat (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Medan vektor yang divergensinya sama dengan nol di seluruh titik disebut medan solenoidal, yang secara fisis berarti tidak terdapat sumber maupun tenggelam aliran, hanya terjadi sirkulasi fluida (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Medan vektor yang *curl*-nya sama dengan vektor nol di seluruh titik disebut *medan irrotasional (irrotational field)*, sebuah sifat yang secara matematis ekuivalen dengan medan tersebut bersifat konservatif, dengan syarat daerah domainnya sederhana secara topologis (Colley, 2021). Terdapat dua identitas vektor penting: $\text{curl}(\nabla f) = \vec{0}$ untuk sembarang medan skalar f yang cukup mulus (medan gradien selalu irrotasional), dan $\text{div}(\text{curl } \vec{F}) = 0$ untuk sembarang medan vektor $\vec{F}$ yang cukup mulus (medan *curl* selalu solenoidal).

Tabel 10.1 Ringkasan Operator Diferensial Vektor

Operator	Notasi	Jenis Hasil	Interpretasi Fisis
Gradien	∇f	Medan vektor	Arah dan laju kenaikan tercepat medan skalar
Divergensi	$\nabla \cdot \vec{F}$	Medan skalar	Laju perluasan/penyusutan (sumber/tenggelam)
<i>Curl</i>	$\nabla \times \vec{F}$	Medan vektor	Kecenderungan rotasi/perputaran medan

Sumber: Stewart, Clegg, & Watson (2021) dan Marsden, Tromba, & Weinstein (2023)

D. Interpretasi Geometris dan Fisis Medan Vektor

Medan vektor tidak hanya dapat dipahami melalui bentuk aljabarnya, tetapi juga melalui interpretasi geometris dan fisisnya. Secara geometris, medan vektor merupakan kumpulan vektor yang ditempatkan pada setiap titik di dalam suatu ruang sehingga menggambarkan arah dan besar suatu besaran pada lokasi tersebut. Representasi ini memudahkan visualisasi fenomena yang melibatkan perubahan arah dan intensitas, seperti aliran fluida, distribusi gaya, maupun medan elektromagnetik (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Secara geometris, panjang setiap vektor menyatakan besar (magnitudo) suatu besaran, sedangkan arah vektor menunjukkan

orientasi besaran tersebut. Daerah yang memiliki vektor lebih panjang mengindikasikan intensitas yang lebih besar, sedangkan perubahan arah vektor dari satu titik ke titik lain menunjukkan variasi pola medan. Oleh karena itu, representasi grafis medan vektor mampu memberikan gambaran intuitif mengenai perilaku suatu sistem dalam ruang tiga dimensi (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Dalam kajian fisika, medan vektor digunakan untuk merepresentasikan berbagai besaran yang memiliki besar dan arah. Contohnya adalah medan kecepatan fluida, medan gaya gravitasi, medan listrik, dan medan magnet. Pada medan kecepatan fluida, setiap vektor menunjukkan arah gerak partikel fluida beserta kecepatannya pada suatu titik, sehingga pola aliran dapat diamati secara langsung melalui distribusi vektor di seluruh daerah aliran (Kreyszig, 2022).

Salah satu interpretasi penting dalam analisis medan vektor adalah gradien. Gradien merupakan vektor yang menunjukkan arah pertambahan tercepat suatu medan skalar, sedangkan besar gradien menyatakan laju maksimum perubahan nilai fungsi. Secara geometris, gradien selalu tegak lurus terhadap permukaan atau kurva level, sehingga banyak dimanfaatkan dalam optimasi, analisis topografi, perpindahan panas, dan difusi zat (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Interpretasi berikutnya adalah divergensi, yaitu ukuran yang menunjukkan kecenderungan suatu medan vektor untuk menyebar atau berkumpul pada suatu titik. Divergensi positif mengindikasikan adanya sumber (*source*) yang menghasilkan aliran keluar, sedangkan divergensi negatif menunjukkan daerah serapan (*sink*) yang menyebabkan aliran masuk. Jika divergensi bernilai nol, maka volume lokal fluida tidak mengalami perubahan sehingga medan tersebut bersifat tak termampatkan (*incompressible*) (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Konsep penting lainnya adalah curl, yang mengukur kecenderungan medan vektor untuk berotasi di sekitar suatu titik. Arah vektor curl menunjukkan sumbu rotasi sesuai kaidah tangan kanan, sedangkan besar curl menyatakan intensitas putaran lokal. Medan dengan curl nol disebut medan irrotasional (*irrotational field*), karena tidak memiliki kecenderungan membentuk pusaran atau rotasi di sekitar titik yang ditinjau (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Ketiga operator diferensial tersebut (gradien, divergensi, dan curl) memberikan informasi yang saling melengkapi mengenai karakteristik suatu medan. Gradien menjelaskan bagaimana suatu

besaran skalar berubah paling cepat, divergensi menggambarkan perilaku aliran yang keluar atau masuk dari suatu titik, sedangkan *curl* menjelaskan kecenderungan medan untuk berputar. Kombinasi ketiga konsep ini menjadi dasar dalam analisis matematis berbagai fenomena pada mekanika fluida, elektromagnetisme, perpindahan panas, geofisika, hingga rekayasa teknik modern (Kreyszig, 2022).

Pemahaman menyeluruh terhadap interpretasi geometris dan fisis gradien, divergensi, dan *curl* menjadi kunci bagi penerapan kalkulus vektor dalam berbagai bidang sains dan rekayasa. Dalam mekanika fluida, ketiga operator ini digunakan secara bersamaan untuk mendeskripsikan berbagai fenomena aliran: gradien tekanan mendorong pergerakan fluida, divergensi kecepatan mengindikasikan kompresibilitas aliran, dan *curl* kecepatan (disebut *vortisitas*) mengindikasikan intensitas pusaran dalam aliran tersebut (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022).

Dalam elektromagnetisme, keempat persamaan Maxwell yang menjadi fondasi teori elektromagnetik klasik seluruhnya dinyatakan dalam bahasa divergensi dan *curl*: hukum Gauss untuk medan listrik ($\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$), hukum Gauss untuk medan magnet ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), hukum induksi Faraday ($\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$), dan hukum Ampère-Maxwell ($\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$) (Griffiths & Inglefield, 2023). Keempat persamaan inilah yang menjadi dasar bagi seluruh teknologi yang memanfaatkan gelombang elektromagnetik, mulai dari radio hingga komunikasi nirkabel modern.

Studi Kasus 10.2 Gradien dalam Algoritma Gradient Descent Pembelajaran Mesin

Konsep gradien, divergensi, dan *curl* juga memiliki relevansi yang terus berkembang dalam bidang-bidang kontemporer, termasuk pemrosesan citra digital, di mana gradien intensitas piksel digunakan untuk mendeteksi tepi objek dalam gambar, serta dalam pembelajaran mesin, di mana konsep gradien menjadi dasar bagi algoritma optimasi *gradient descent* yang digunakan untuk melatih model-model kecerdasan buatan (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023). Algoritma ini bekerja dengan menghitung gradien fungsi kerugian (*loss function*) terhadap jutaan hingga

miliaran parameter model, kemudian memperbarui parameter tersebut searah negatif gradien yaitu arah penurunan fungsi paling curam secara iteratif hingga mencapai nilai kerugian minimum. Prinsip inilah yang mendasari pelatihan hampir seluruh model pembelajaran mendalam kontemporer, termasuk model bahasa besar dan sistem pengenalan gambar, menunjukkan bahwa konsep gradien yang dirumuskan lebih dari satu abad lalu tetap menjadi fondasi teknologi kecerdasan buatan modern.



BAB XI

ANALISIS VEKTOR DALAM KALKULUS MULTIVARIABEL

Bab ini secara eksplisit menyatukan analisis vektor dengan kalkulus multivariabel, menunjukkan bagaimana konsep-konsep yang telah dibangun pada bab-bab sebelumnya, khususnya gradien pada Bab X diterapkan secara langsung dalam kajian fungsi multivariabel. Pembahasan mencakup turunan parsial, diferensial total, turunan berarah, bidang singgung, serta optimasi fungsi multivariabel menggunakan metode pengali Lagrange, yang seluruhnya memiliki fondasi konseptual dalam analisis vektor (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Biografi Singkat: Joseph-Louis Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), seorang matematikawan Italia-Prancis, dikenal luas atas kontribusinya dalam mekanika analitik dan kalkulus variasi, termasuk metode pengali yang menyandang namanya dan dibahas pada bab ini. Lagrange mengembangkan metode ini sebagai bagian dari karya monumentalnya *Mécanique analytique*, yang menyajikan seluruh mekanika klasik dalam bentuk persamaan aljabar murni tanpa memerlukan diagram geometris sama sekali, sebuah pendekatan yang pada masanya dianggap revolusioner (Katz & Parshall, 2022). Lagrange terkenal dengan pernyataannya yang menyatakan kebanggaan bahwa karyanya tidak memuat satu pun gambar,

menegaskan komitmennya terhadap formalisme aljabar murni. Metode pengali Lagrange merupakan salah satu warisan paling bertahan lama dari pendekatan analitis Lagrange, dan hingga kini tetap menjadi alat standar dalam optimasi matematika di berbagai bidang.

A. Fungsi Multivariabel dan Turunan Parsial

Fungsi multivariabel (*multivariable function*) adalah fungsi yang bergantung pada lebih dari satu variabel bebas, dituliskan dalam bentuk umum $f(x,y)$ untuk fungsi dua variabel atau $f(x,y,z)$ untuk fungsi tiga variabel. Berbeda dengan fungsi satu variabel yang grafiknya berupa kurva pada bidang, grafik fungsi dua variabel berupa permukaan (*surface*) dalam ruang tiga dimensi, sedangkan fungsi tiga variabel atau lebih tidak dapat divisualisasikan secara langsung namun dapat dipahami melalui permukaan ketinggian (Hass, Heil, & Weir, 2022).

Turunan parsial (*partial derivative*) suatu fungsi multivariabel terhadap salah satu variabelnya didefinisikan sebagai laju perubahan fungsi tersebut terhadap variabel yang bersangkutan, dengan variabel-variabel lainnya dianggap konstan. Untuk fungsi $f(x,y)$, turunan parsial terhadap x dinotasikan $\partial f/\partial x$ atau f_x , dan dihitung dengan menurunkan f terhadap x seperti biasa sambil memperlakukan y sebagai konstanta (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Konsep ini secara langsung menjadi komponen penyusun gradien, sebagaimana telah dibahas pada Bab X, sehingga turunan parsial dan gradien merupakan dua konsep yang saling terkait erat. Notasi turunan parsial $\partial f/\partial x$ sengaja dibedakan dari notasi turunan biasa df/dx menggunakan simbol ∂ (dibaca "partial" atau "del parsial") untuk menegaskan bahwa turunan tersebut dihitung dengan variabel-variabel lain dijaga konstan, sebuah kehati-hatian notasi yang penting mengingat fungsi multivariabel dapat memiliki banyak turunan parsial berbeda terhadap masing-masing variabelnya (Anton, Bivens, & Davis, 2022).

Turunan parsial orde kedua, seperti $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial y^2$, dan turunan parsial campuran $\partial^2 f/\partial x \partial y$, memberikan informasi tambahan mengenai kelengkungan permukaan grafik fungsi multivariabel. Salah satu hasil penting dalam kalkulus multivariabel adalah *teorema Clairaut* (juga

disebut teorema Schwarz), yang menyatakan bahwa apabila turunan parsial campuran f_{xy} dan f_{yx} keduanya kontinu pada suatu daerah, maka keduanya sama, yaitu $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Teorema ini menyederhanakan banyak perhitungan dalam kalkulus multivariabel lanjut.

Studi Kasus 11.1 Turunan Parsial dalam Analisis Sensitivitas Ekonomi

Dalam ilmu ekonomi, fungsi produksi yang menyatakan output sebagai fungsi dari input tenaga kerja dan modal, $Q(L, K)$, dianalisis menggunakan turunan parsial untuk mengukur produktivitas marginal masing-masing faktor produksi. Turunan parsial $\partial Q / \partial L$ menyatakan tambahan output akibat penambahan satu unit tenaga kerja dengan modal tetap, sedangkan $\partial Q / \partial K$ menyatakan hal serupa untuk modal, sebuah aplikasi langsung dari konsep turunan parsial (Kreyszig, 2021). Analisis sensitivitas semacam ini menjadi dasar bagi pengambilan keputusan investasi dan alokasi sumber daya dalam perusahaan, di mana manajer perlu memahami faktor produksi mana yang memberikan kontribusi marginal lebih besar terhadap output sebelum menentukan prioritas investasi.

B. Diferensial Total dan Turunan Berarah

Diferensial total (*total differential*) suatu fungsi $f(x, y)$ menyatakan perubahan nilai fungsi akibat perubahan kecil pada kedua variabel bebasnya, dirumuskan sebagai $df = (\partial f / \partial x)dx + (\partial f / \partial y)dy$, yang merupakan pendekatan linear terhadap perubahan fungsi sesungguhnya Δf untuk perubahan dx dan dy yang cukup kecil (Larson & Edwards, 2022). Konsep diferensial total menjadi dasar bagi analisis propagasi kesalahan (*error propagation*) dalam pengukuran fisis.

Turunan berarah (*directional derivative*) suatu medan skalar f pada suatu titik dan dalam arah vektor satuan $\hat{u}$ didefinisikan sebagai laju perubahan f pada titik tersebut ketika bergerak searah $\hat{u}$, dirumuskan sebagai $D_{\hat{u}} f = \nabla f \cdot \hat{u}$, yaitu produk titik antara gradien f dengan vektor satuan arah yang ditinjau (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Rumus ini menunjukkan hubungan erat antara turunan berarah dan gradien: turunan

parsial $\partial f/\partial x$ dan $\partial f/\partial y$ sesungguhnya merupakan kasus khusus turunan berarah dalam arah $i \rightarrow$ dan $j \rightarrow$.

Dari rumus turunan berarah $D_{\hat{u}} f = \nabla f \cdot \hat{u} = |\nabla f| \cos \theta$, dengan θ adalah sudut antara gradien dan arah $\hat{u}$, dapat disimpulkan bahwa nilai turunan berarah maksimum terjadi ketika $\theta=0^\circ$, yaitu ketika arah $\hat{u}$ searah dengan gradien, dengan nilai maksimum sama dengan $|\nabla f|$. Sebaliknya, nilai turunan berarah minimum terjadi ketika $\theta=180^\circ$ (Colley, 2021). Hasil ini memberikan pembuktian formal terhadap interpretasi geometris gradien yang telah disinggung pada Bab X.

Contoh : Diketahui $f(x,y) = x^2y + 3xy^2$. Tentukan turunan berarah f di titik $(1,2)$ dalam arah vektor $\vec{v} = (3,4)$.

Pembahasan:

Langkah pertama adalah menentukan gradien fungsi.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + 3y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 6xy.\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\nabla f = (2xy + 3y^2, x^2 + 6xy).$$

Nilai gradien pada titik $(1, 2)$ adalah

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 2) &= (2(1)(2) + 3(2)^2, 1^2 + 6(1)(2)) \\ &= (4 + 12, 1 + 12) \\ &= (16, 13).\end{aligned}$$

Selanjutnya, tentukan vektor satuan yang searah dengan $\vec{v} = (3, 4)$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

sehingga

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Turunan berarah fungsi pada arah $\hat{u}$ diperoleh dari hasil kali titik antara gradien dan vektor satuan.

$$\begin{aligned} D_{\hat{u}}f(1, 2) &= \nabla f(1, 2) \cdot \hat{u} \\ &= (16, 13) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{48}{5} + \frac{52}{5} \\ &= \frac{100}{5} \\ &= 20. \end{aligned}$$

Jawaban:

Turunan berarah fungsi f di titik $(1, 2)$ dalam arah vektor $(3, 4)$ adalah

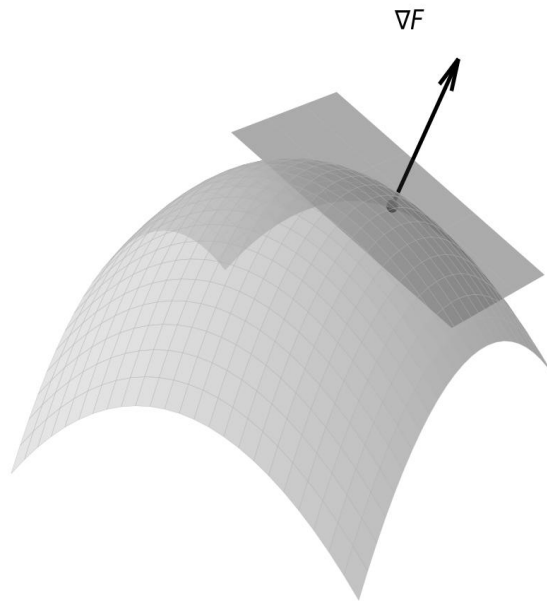
$$D_{\hat{u}}f(1, 2) = 20.$$

Karena nilainya positif, fungsi f meningkat ketika bergerak dari titik $(1, 2)$ ke arah vektor $(3, 4)$. Besarnya nilai turunan berarah menunjukkan bahwa laju pertambahan fungsi pada arah tersebut adalah **20 satuan per satuan panjang**.

C. Gradien dan Bidang Singgung

Salah satu penerapan paling penting gradien dalam geometri analitik adalah penentuan bidang singgung (*tangent plane*) terhadap suatu permukaan pada titik tertentu. Untuk permukaan yang dinyatakan secara implisit sebagai $F(x, y, z) = k$, gradien ∇F pada suatu titik P_0 pada permukaan tersebut selalu tegak lurus terhadap permukaan pada titik itu, sehingga $\nabla F(P_0)$ dapat langsung digunakan sebagai vektor normal bidang singgung (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Persamaan bidang singgung pada titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dinyatakan sebagai $F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$, sesuai dengan bentuk persamaan bidang.

Gambar 11.1 Bidang Singgung pada Permukaan Melengkung



Bidang singgung (berwarna gelap) menyentuh permukaan melengkung (berwarna terang) pada satu titik, dengan vektor normal bidang singgung tersebut sama dengan vektor gradien ∇F medan skalar yang mendefinisikan permukaan tersebut, dievaluasi pada titik singgung (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Untuk permukaan yang dinyatakan secara eksplisit sebagai $z=f(x,y)$, penentuan bidang singgung dapat dilakukan dengan mendefinisikan fungsi implisit terkait $F(x,y,z) = f(x,y)-z$, sehingga $\nabla F = (f_x, f_y, -1)$, dan persamaan bidang singgungnya menjadi $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ (Hass, Heil, & Weir, 2022). Bentuk persamaan ini secara langsung menghubungkan konsep bidang singgung dengan linearisasi fungsi multivariabel yang telah dibahas melalui diferensial total.

Contoh

Tentukan persamaan bidang singgung permukaan $z=x^2+y^2$ pada titik $(1,2,5)$.

Pembahasan:

Misalkan

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Turunan parsial pertama terhadap masing-masing variabel adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Pada titik $(1, 2)$, diperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

Persamaan bidang singgung permukaan $z = f(x, y)$ di titik (x_0, y_0, z_0) diberikan oleh

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Dengan mensubstitusikan titik $(1, 2, 5)$, diperoleh

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2).$$

Selanjutnya, persamaan tersebut disederhanakan menjadi

$$z - 5 = 2x - 2 + 4y - 8,$$

$$z = 2x + 4y - 5.$$

Jawaban:

Persamaan bidang singgung permukaan $z = x^2 + y^2$ pada titik $(1, 2, 5)$ adalah

$$z = 2x + 4y - 5.$$

Bidang ini merupakan pendekatan linear terbaik terhadap permukaan di sekitar titik $(1, 2, 5)$, sehingga memiliki kemiringan yang sama dengan permukaan pada titik tersebut.

D. Optimasi Fungsi Multivariabel dan Pengali Lagrange

Penentuan titik ekstrem lokal suatu fungsi multivariabel tanpa kendala dilakukan melalui pencarian *titik kritis* (*critical point*), yaitu titik-titik di mana gradien fungsi sama dengan vektor nol, $\nabla f = \vec{0}$. Untuk menentukan jenis titik kritis, digunakan *uji turunan kedua* (*second derivative test*) yang melibatkan determinan matriks Hessian (Stewart, Clegg, & Watson, 2021).

Untuk masalah optimasi dengan kendala, yaitu mencari nilai ekstrem fungsi $f(x,y,z)$ dengan syarat $g(x,y,z)=c$, digunakan *metode pengali Lagrange* (*Lagrange multipliers*), yang didasarkan pada prinsip geometris bahwa pada titik ekstrem bersyarat, gradien fungsi objektif ∇f harus sejajar dengan gradien fungsi kendala ∇g , dituliskan sebagai $\nabla f = \lambda \nabla g$, dengan λ disebut *pengali Lagrange* (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Prinsip kesejajaran gradien ini secara geometris berarti bahwa pada titik optimum, permukaan ketinggian fungsi objektif bersinggungan dengan permukaan kendala.

Tabel 11.1 Perbandingan Optimasi Tanpa Kendala dan dengan Kendala

Aspek	Tanpa Kendala	Dengan Kendala (Lagrange)
Syarat titik kritis	$\nabla f = \vec{0}$	$\nabla f = \lambda \nabla g$, dengan $g(x,y,z)=c$
Jumlah persamaan	n persamaan (n variabel)	n+1 persamaan (n variabel + λ)
Uji jenis ekstrem	Matriks Hessian	Analisis batas/perbandingan nilai fungsi
Contoh aplikasi	Titik kritis permukaan bebas	Optimasi produksi dengan anggaran tetap

Sumber: Anton, Bivens, & Davis (2022) dan Kreyszig (2021)

Metode pengali Lagrange memiliki aplikasi yang sangat luas dalam ekonomi, khususnya dalam teori optimasi konsumen dan produsen dengan kendala anggaran atau sumber daya, serta dalam pembelajaran mesin untuk masalah optimasi dengan batasan tertentu, seperti pada algoritma *support vector machine* yang memaksimumkan margin klasifikasi dengan kendala pada parameter model (Goodfellow,

Bengio, & Courville, 2023). Metode ini juga dapat diperluas untuk menangani lebih dari satu kendala sekaligus, dengan setiap kendala tambahan memperkenalkan satu pengali Lagrange baru, sehingga untuk m kendala pada fungsi n variabel, sistem persamaan yang harus diselesaikan menjadi $n+m$ persamaan untuk $n+m$ variabel yang tidak diketahui (Kreyszig, 2021).

Studi Kasus 11.2 Pengali Lagrange dalam Optimasi Portofolio Investasi

Teori portofolio modern dalam ilmu keuangan memanfaatkan metode pengali Lagrange untuk menentukan alokasi aset optimal yang memaksimalkan imbal hasil ekspektasi dengan kendala tingkat risiko tertentu, atau sebaliknya meminimumkan risiko dengan kendala imbal hasil minimum tertentu (Kreyszig, 2021). Fungsi objektif berupa imbal hasil ekspektasi portofolio dioptimasi terhadap bobot alokasi masing-masing aset, dengan kendala berupa total bobot alokasi sama dengan satu (seluruh dana teralokasikan) dan/atau tingkat risiko (varians portofolio) tidak melebihi batas tertentu. Prinsip kesejajaran gradien yang mendasari metode Lagrange, menjadi fondasi matematis bagi model Markowitz yang meraih Hadiah Nobel Ekonomi dan hingga kini tetap menjadi kerangka dasar manajemen portofolio investasi modern.



$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$

20% 45%

BAB XII

INTEGRAL VEKTOR DAN APLIKASI LANJUT

Bab penutup ini membahas puncak dari kalkulus vektor, yaitu integral garis dan integral permukaan, beserta tiga teorema integral vektor klasik yaitu teorema Green, teorema Stokes, dan teorema divergensi Gauss yang menyatukan seluruh konsep yang telah dibangun sepanjang buku ini ke dalam kerangka yang koheren. Ketiga teorema ini pada dasarnya merupakan generalisasi teorema fundamental kalkulus ke dimensi yang lebih tinggi, menghubungkan integral suatu medan pada suatu daerah dengan integral pada batas daerah tersebut (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

Biografi Singkat: George Green dan George Gabriel Stokes

George Green (1793-1841), seorang matematikawan otodidak Inggris yang bekerja sebagai penggilingan tepung sebelum menekuni matematika secara formal, mempublikasikan karyanya mengenai teorema yang menyandang namanya pada tahun 1828 melalui biaya sendiri, karena kurangnya afiliasi akademik formal pada masa itu (Katz & Parshall, 2022). Karyanya baru mendapatkan pengakuan luas setelah ditemukan kembali oleh William Thomson (Lord Kelvin) beberapa tahun setelah kematian Green. George Gabriel Stokes (1819-1903), seorang fisikawan-matematikawan Irlandia yang menjabat sebagai profesor di Cambridge, memperluas dan mempopulerkan hasil-hasil terkait, meskipun teorema yang menyandang namanya sesungguhnya pertama kali dirumuskan oleh William Thomson dalam sebuah

surat kepada Stokes, yang kemudian menjadikannya sebagai soal ujian bagi mahasiswanya di Cambridge. Kisah kedua tokoh ini menegaskan bahwa penamaan teorema matematika tidak selalu mencerminkan penemunya secara tepat, melainkan seringkali mencerminkan siapa yang mempopulerkan atau menyebarluaskan hasil tersebut secara efektif.

A. Integral Garis dan Integral Permukaan

Integral garis (*line integral*) suatu medan vektor $\vec{F}$ sepanjang kurva C yang diparametrisasi oleh $\vec{r}(t)$ untuk $t \in [a, b]$ didefinisikan sebagai $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$, yang secara fisis menyatakan usaha total yang dilakukan oleh medan gaya $\vec{F}$ terhadap sebuah partikel yang bergerak sepanjang kurva C (Stewart, Clegg, & Watson, 2021). Integral garis juga dapat didefinisikan untuk medan skalar, yaitu $\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$, yang menyatakan akumulasi nilai medan skalar sepanjang kurva.

Suatu integral garis medan vektor konservatif memiliki sifat istimewa yang disebut kebebasan lintasan (*path independence*): nilai integral garis hanya bergantung pada titik awal dan titik akhir kurva, tidak bergantung pada bentuk lintasan yang ditempuh. Secara formal, apabila $\vec{F} = \nabla f$ untuk suatu fungsi potensial f , maka $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$, yang merupakan analog langsung dari teorema fundamental kalkulus pada konteks integral garis (Colley, 2021). Sifat ini menjelaskan mengapa usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi atau gaya listrik statik hanya bergantung pada posisi awal dan akhir, sebuah prinsip fisika yang dikenal sebagai kekekalan energi mekanik.

Integral permukaan (*surface integral*) memperluas konsep integral garis ke permukaan dua dimensi dalam ruang tiga dimensi. Integral permukaan medan vektor $\vec{F}$ melalui permukaan S dengan orientasi tertentu didefinisikan sebagai $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA$, dengan $\hat{n}$ adalah vektor normal satuan permukaan (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021). Secara fisis, integral permukaan medan vektor ini menyatakan *fluks* (*flux*) medan tersebut yang melintasi permukaan S , sebuah konsep yang sangat penting dalam mekanika fluida dan elektromagnetisme. Analogi sederhana untuk memahami fluks adalah

membayangkan seberapa banyak "aliran" yang melewati suatu jaring ikan yang direntangkan dalam aliran sungai: jika jaring diorientasikan tegak lurus terhadap arah aliran, fluks yang melewatinya maksimum, sedangkan jika jaring diorientasikan sejajar dengan arah aliran, fluks yang melewatinya bernilai nol, sebuah intuisi yang secara matematis tercermin dalam faktor $\hat{n}$ (vektor normal permukaan) pada rumus integral permukaan (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2021).

Contoh

Hitung integral garis

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

untuk medan vektor

$$\mathbf{F} = (y, x)$$

sepanjang kurva

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Pembahasan

Turunan dari parameterisasi kurva adalah

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{d}{dt}t, \frac{d}{dt}t^2 \right) = (1, 2t).$$

Substitusikan parameter kurva ke dalam medan vektor sehingga diperoleh

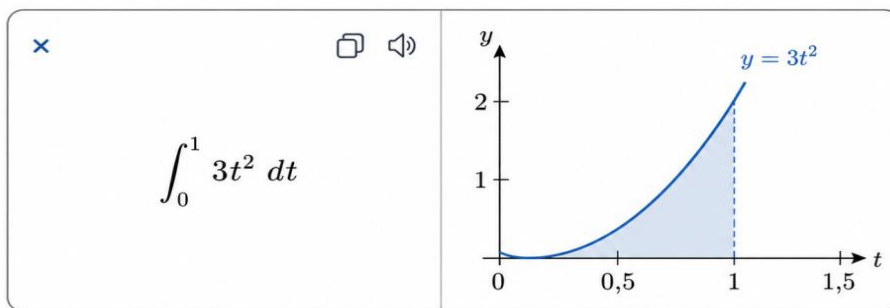
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2) = (t^2, t).$$

Hasil perkalian titik antara medan vektor dan turunan kurva adalah

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = (t^2, t) \cdot (1, 2t) = t^2 + 2t^2 = 3t^2.$$

Integral garis menjadi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 3t^2 dt.$$



Selanjutnya,

$$\int_0^1 3t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

Jadi,

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1.}$$

B. Teorema Green, Teorema Stokes, dan Teorema Divergensi Gauss

Teorema *Green* (*Green's theorem*) menghubungkan integral garis suatu medan vektor sepanjang kurva tertutup sederhana C pada bidang dengan integral lipat dua atas daerah D yang dibatasi oleh kurva tersebut, dinyatakan sebagai $\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dA$, dengan syarat kurva C diorientasikan berlawanan arah jarum jam (Anton, Bivens, & Davis, 2022). Teorema ini sering dimanfaatkan untuk menyederhanakan perhitungan integral garis yang rumit menjadi integral lipat dua yang lebih mudah dihitung, atau sebaliknya.

Teorema *Stokes* (*Stokes' theorem*) menggeneralisasi teorema Green ke permukaan yang tidak harus datar dalam ruang tiga dimensi, menyatakan bahwa integral garis medan vektor $\vec{F}$ sepanjang kurva batas ∂S suatu permukaan berorientasi S sama dengan integral permukaan *curl* medan vektor tersebut melalui permukaan S , dituliskan sebagai $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl } \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023). Teorema Stokes menegaskan bahwa nilai integral permukaan *curl* suatu medan vektor tidak bergantung pada bentuk spesifik permukaan S , melainkan hanya bergantung pada kurva batasnya.

Teorema Divergensi Gauss (*Gauss's divergence theorem*) menghubungkan integral permukaan suatu medan vektor melalui permukaan tertutup S dengan integral lipat tiga divergensi medan vektor tersebut atas daerah volume V yang dibatasi oleh permukaan tersebut, dinyatakan sebagai $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\text{div } \vec{F}) dV$ (Griffiths & Inglefield, 2023). Teorema ini menjadi dasar matematis bagi hukum Gauss dalam elektrostatika.

Tabel 12.1 Ringkasan Tiga Teorema Integral Vektor

Teorema	Menghubungkan	Rumusan Inti
Teorema Green	Integral garis pada bidang dengan integral lipat dua pada daerah.	$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$ di mana: C adalah kurva tertutup berorientasi positif (berlawanan arah jarum jam) yang membatasi daerah D, $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ memiliki turunan parsial kontinu di daerah D, $dA = dx dy$ adalah elemen luas pada bidang.
Teorema Stokes	Integral garis pada kurva tertutup di ruang dengan integral permukaan dari curl.	$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ di mana: ∂S adalah batas (kurva tertutup) dari permukaan S, $\vec{F}$ memiliki turunan parsial kontinu pada suatu daerah yang memuat S, $d\vec{S}$ adalah elemen vektor permukaan (normal ke S)).
Teorema Divergensi Gauss	Integral fluks pada permukaan tertutup dengan integral lipat tiga dari divergensi.	$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$ di mana: S adalah permukaan tertutup yang membatasi volume V, $\vec{F}$ memiliki turunan parsial kontinu pada suatu daerah yang memuat V, $dV = dx dy dz$ adalah elemen volume di ruang.

Sumber: Marsden, Tromba, & Weinstein (2023) dan Griffiths & Inglefield (2023)

Gambar 12.1 Hubungan Hierarkis Tiga Teorema Integral Vektor

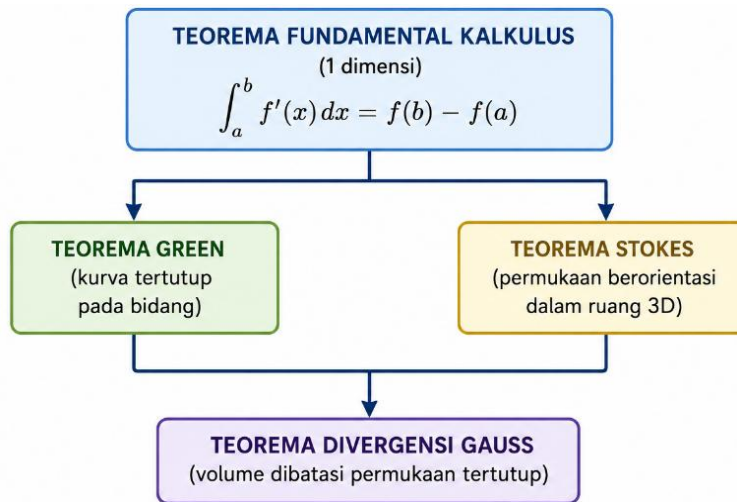


Diagram memperlihatkan bahwa ketiga teorema integral vektor pada dasarnya merupakan generalisasi teorema fundamental kalkulus ke dimensi yang lebih tinggi. Ketiganya menyatakan prinsip yang sama: integral suatu turunan pada suatu daerah sama dengan integral fungsi asal pada batas daerah tersebut (Marsden, Tromba, & Weinstein, 2023).

C. Penerapan Analisis Vektor dalam Sains dan Rekayasa

Analisis vektor, khususnya melalui ketiga teorema integral yang telah dibahas, memiliki penerapan yang sangat luas dalam berbagai bidang sains dan rekayasa. Dalam rekayasa elektro, teorema divergensi dan teorema Stokes menjadi dasar bagi perumusan persamaan Maxwell dalam bentuk integral maupun diferensial, yang selanjutnya digunakan untuk merancang antena, saluran transmisi, dan berbagai perangkat elektromagnetik lainnya (Griffiths & Inglefield, 2023). Dalam rekayasa mesin dan aerodinamika, teorema-teorema ini digunakan untuk menganalisis aliran fluida di sekitar objek, termasuk perhitungan gaya angkat dan gaya hambat pada sayap pesawat terbang.

Dalam bidang geofisika, analisis vektor digunakan secara ekstensif untuk memodelkan medan gravitasi dan medan magnet bumi, di mana teorema divergensi Gauss membantu menghubungkan pengukuran medan pada permukaan bumi dengan distribusi massa di bawah permukaan (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Dalam bidang kedokteran, khususnya pencitraan medis seperti MRI, pemahaman

terhadap medan magnet dan gradiennya menjadi dasar bagi teknik pencitraan yang memungkinkan visualisasi struktur internal tubuh manusia tanpa prosedur invasif.

Studi Kasus 12.1 Teorema Divergensi dalam Simulasi Perubahan Iklim

Model simulasi iklim global memanfaatkan teorema divergensi Gauss untuk memastikan kekekalan massa dan energi dalam perhitungan sirkulasi atmosfer dan lautan. Ketika memodelkan perpindahan panas atau uap air melalui volume atmosfer tertentu, teorema divergensi memungkinkan ilmuwan iklim menghubungkan fluks neto yang melewati batas volume tersebut dengan perubahan total kuantitas di dalam volume (Kundu, Cohen, & Dowling, 2022). Prinsip kekekalan berbasis teorema divergensi inilah yang menjamin bahwa model simulasi iklim tidak "menciptakan" atau "menghilangkan" massa udara maupun energi secara tidak realistis, sebuah aspek teknis yang krusial bagi keandalan proyeksi perubahan iklim jangka panjang yang menjadi dasar kebijakan lingkungan di berbagai negara.

Dalam sains data dan pembelajaran mesin kontemporer, algoritma-algoritma optimasi yang digunakan untuk melatih model pembelajaran mendalam pada dasarnya merupakan penerapan konsep gradien pada ruang berdimensi sangat tinggi, dengan prinsip yang secara konseptual identik dengan metode pengali Lagrange dan gradient descent (Goodfellow, Bengio, & Courville, 2023).

D. Arah Pengembangan Analisis Vektor dalam Matematika Modern

Perkembangan analisis vektor tidak berhenti pada bentuk klasik yang telah dibahas sepanjang buku ini. Generalisasi lebih lanjut mengarah pada teori *bentuk diferensial* (*differential forms*), yang menyatukan gradien, divergensi, dan *curl*, beserta ketiga teorema integral vektor, ke dalam satu kerangka tunggal yang disebut teorema

Stokes umum (*generalized Stokes' theorem*), dinyatakan secara ringkas sebagai:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

untuk suatu bentuk diferensial ω pada manifold M (Tromba & Marsden, 2022). Kerangka ini memungkinkan analisis vektor diperluas ke ruang berdimensi sembarang dan bahkan ke struktur geometris yang lebih umum daripada ruang Euklides datar.

Generalisasi lain yang tak kalah penting adalah pengembangan *kalkulus tensor* (*tensor calculus*), yang memandang vektor sebagai kasus khusus tensor berorde satu. Kalkulus tensor inilah yang menjadi bahasa formal bagi teori relativitas umum Einstein, di mana kelengkungan ruang-waktu dideskripsikan melalui tensor kelengkungan Riemann, sebuah generalisasi jauh dari konsep kelengkungan kurva (do Carmo, 2021).

Dalam konteks matematika komputasi kontemporer, penelitian mengenai *metode elemen hingga* (*finite element method*) dan *skema beda hingga* (*finite difference scheme*) untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik terus mengandalkan fondasi konseptual analisis vektor klasik (Kreyszig, 2021). Perkembangan ini menunjukkan bahwa meskipun analisis vektor telah berusia lebih dari satu abad sejak dirumuskan oleh Gibbs dan Heaviside, kerangka konseptualnya tetap menjadi fondasi yang tidak tergantikan bagi pengembangan matematika dan sains terapan kontemporer.

Sebagai penutup buku referensi ini, dapat disimpulkan bahwa analisis vektor bukanlah sekadar kumpulan teknik komputasi yang terpisah-pisah, melainkan kerangka konseptual yang koheren dan terpadu, yang menyatukan aljabar, geometri, dan kalkulus ke dalam satu bahasa formal yang elegan.

Contoh

Gunakan teorema divergensi Gauss untuk menghitung fluks medan vektor $\vec{F}=(x,y,z)$ melalui permukaan bola berjari-jari a berpusat di titik asal.

Pembahasan

Menurut Teorema Divergensi Gauss,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dV,$$

dengan S adalah permukaan tertutup bola dan V adalah volume yang dibatasi oleh permukaan tersebut.

Mula-mula dihitung divergensi medan vektor.

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle = \langle x, y, z \rangle$, maka

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Substitusikan $P = x$, $Q = y$, $R = z$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Jadi, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$.

Karena divergensi bernilai konstan, integral volume menjadi

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dV = \iiint_V 3 \, dV.$$

Sehingga,

$$\iiint_V 3 \, dV.$$

Volume bola berjari-jari a adalah

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Dengan demikian,

$$\iiint_V 3 \, dV = 3 \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \right) = 4\pi a^3.$$

Jadi, fluks medan vektor melalui permukaan bola adalah

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi a^3.$$

Perhitungan ini menunjukkan bahwa Teorema Divergensi Gauss memberikan cara yang jauh lebih sederhana dibandingkan menghitung integral permukaan secara langsung. Jika menggunakan integral permukaan, permukaan bola harus diparameterkan terlebih dahulu, misalnya dengan koordinat bola, kemudian dihitung vektor normal serta elemen luas permukaannya. Dengan Teorema Gauss, seluruh proses tersebut digantikan oleh perhitungan divergensi dan integral volume yang jauh lebih mudah.

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

2 DAFTAR PUSTAKA

- Adams, R. A., & Essex, C. (2022). *Calculus: A complete course* (10th ed.). Pearson Education.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2022). *Calculus: Early transcendentals* (12th ed.). John Wiley & Sons.
- Axler, S. (2024). *Linear algebra done right* (4th ed.). Springer.
- Bird, J. (2021). *Higher engineering mathematics* (9th ed.). Routledge.
- Boas, M. L. (2021). *Mathematical methods in the physical sciences* (4th ed.). John Wiley & Sons.
- Chapra, S. C. (2023). *Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists* (5th ed.). McGraw-Hill.
- Colley, S. J. (2021). *Vector calculus* (5th ed.). Pearson Education.
- Crowe, M. J. (2021). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system* (Cetak ulang). Dover Publications.
- Do Carmo, M. P. (2021). *Differential geometry of curves and surfaces* (Revised & updated 2nd ed.). Dover Publications.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2023). *Deep learning* (Edisi pembaruan daring). MIT Press.
- Griffiths, D. J., & Inglefield, C. (2023). *Introduction to electrodynamics* (5th ed.). Cambridge University Press.
- Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2021). *Fundamentals of physics* (12th ed.). John Wiley & Sons.
- Hass, J., Heil, C., & Weir, M. D. (2022). *Thomas' calculus: Early transcendentals* (15th ed.). Pearson Education.
- Hibbeler, R. C. (2022). *Engineering mechanics: Statics* (15th ed.). Pearson Education.
- Katz, V. J., & Parshall, K. H. (2022). *Taming the unknown: A history of algebra from antiquity to the early twentieth century*. Princeton University Press.
- Kreyszig, E. (2021). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.
- Kreyszig, E., & Kreyszig, H. (2022). *Advanced engineering mathematics* (11th ed.). John Wiley & Sons.

- Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2022). *Fluid mechanics* (7th ed.). Academic Press.
- Larson, R., & Edwards, B. (2023). *Calculus* (12th ed.). Cengage Learning.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2021). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson Education.
- Marsden, J. E., Tromba, A., & Weinstein, A. (2023). *Vector calculus and its applications in the sciences* (Edisi revisi). W. H. Freeman.
- Nicholson, W. K. (2021). *Linear algebra with applications* (8th ed.). McGraw-Hill.
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2021). *Calculus* (10th ed.). Pearson Education.
- Rahmawati, D., & Suryadi, D. (2022). Analisis kemampuan berpikir spasial mahasiswa pada materi vektor dan kalkulus multivariabel. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 16(2), 145–158.
- Rahmawati, F., & Suryadi, D. (2022). Peran visualisasi geometris dalam pemahaman konsep produk vektor pada mahasiswa calon guru matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 16(1), 88–102.
- Riley, K. F., Hobson, M. P., & Bence, S. J. (2022). *Mathematical methods for physics and engineering* (4th ed., cetak ulang). Cambridge University Press.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Spellman, D. (2021). *Schaum's outline of vector analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S. (2021). *Calculus: Early transcendentals* (9th ed.). Cengage Learning.
- Suryadi, D., & Turmudi. (2023). Pengembangan penalaran spasial mahasiswa melalui pembelajaran geometri analitik berbasis representasi vektor. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 17(2), 145–160.
- Tromba, A., & Marsden, J. (2022). *Vector calculus* (7th ed.). W. H. Freeman.
- Tromba, A., & Marsden, J. E. (2022). *Vector calculus, linear algebra, and differential forms* (5th ed.). Matrix Editions.
- Weir, M. D., Hass, J., & Giordano, F. R. (2021). *Thomas' calculus* (15th ed.). Pearson Education.
- Zill, D. G., & Wright, W. S. (2022). *Advanced engineering mathematics* (7th ed.). Jones & Bartlett Learning.

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

20%

GLOSARIUM

Akselerasi	Perubahan kecepatan terhadap waktu yang dapat direpresentasikan sebagai besaran vektor karena memiliki besar dan arah.
Basis	Himpunan vektor bebas linear yang dapat digunakan untuk membentuk setiap vektor dalam suatu ruang vektor.
Bidang	Permukaan dua dimensi yang dapat direpresentasikan secara analitik menggunakan persamaan tertentu dalam ruang.
<i>Curl</i>	Operator diferensial vektor yang mengukur kecenderungan rotasi atau perputaran suatu medan vektor pada suatu titik.
Diferensial	Perubahan infinitesimal pada suatu variabel yang digunakan dalam analisis turunan dan integral.
Divergensi	Operator diferensial yang mengukur kecenderungan suatu medan vektor untuk menyebar atau berkumpul pada suatu titik.
<i>Dot Product</i>	Operasi antara dua vektor yang menghasilkan skalar dan berkaitan dengan panjang serta sudut antara kedua vektor.
Eigenvalue	Nilai skalar yang menunjukkan faktor pengali suatu vektor ketika dikenai transformasi linear tertentu.

Eigenvector	Vektor tak nol yang arah atau garis bendangnya tetap ketika dikenai suatu transformasi linear.
Fungsi	Relasi matematis yang memasangkan setiap elemen pada domain dengan tepat satu elemen pada kodomain.
Fungsi Multivariabel	Fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas, seperti fungsi dengan bentuk $f(x, y)$ atau $f(x, y, z)$.
Gradien	Vektor yang terdiri atas turunan parsial suatu fungsi skalar dan menunjukkan arah kenaikan tercepat fungsi tersebut.
Himpunan	Kumpulan objek atau elemen yang didefinisikan secara jelas dan menjadi dasar pembentukan konsep matematika.
Integral Garis	Integral yang dihitung sepanjang suatu kurva dan dapat digunakan untuk menentukan akumulasi besaran sepanjang lintasan.
Integral Lipat	Integral yang dilakukan terhadap dua atau lebih variabel untuk menghitung besaran pada suatu daerah atau volume.
Integral Permukaan	Integral yang dilakukan pada suatu permukaan untuk menghitung akumulasi besaran skalar atau vektor.
Jarak	Ukuran panjang antara dua titik atau objek geometris yang dapat ditentukan menggunakan konsep norma atau metrik.
Kalkulus Multivariabel	Cabang kalkulus yang mempelajari fungsi, turunan, dan integral yang melibatkan lebih dari satu variabel.

Koordinat Kartesius	Sistem koordinat yang menggunakan sumbu-sumbu tegak lurus untuk menentukan posisi titik dalam ruang dua atau tiga dimensi.
Koordinat Polar	Sistem koordinat yang menyatakan posisi suatu titik berdasarkan jarak dari titik asal dan sudut terhadap sumbu acuan.
Koordinat Silinder	Sistem koordinat tiga dimensi yang menggabungkan koordinat polar dengan koordinat ketinggian.
Koordinat Bola	Sistem koordinat tiga dimensi yang menggunakan jarak radial dan dua sudut untuk menentukan posisi suatu titik.
Kurva	Lintasan geometris yang dapat direpresentasikan secara parametrik atau sebagai himpunan titik yang memenuhi persamaan tertentu.
Limit	Nilai yang didekati oleh suatu fungsi ketika variabelnya mendekati nilai tertentu.
Matriks	Susunan bilangan berbentuk baris dan kolom yang dapat digunakan untuk merepresentasikan transformasi linear dan sistem persamaan.
Medan Skalar	Fungsi yang memberikan nilai skalar pada setiap titik dalam suatu wilayah atau ruang.
Medan Vektor	Fungsi yang memberikan sebuah vektor pada setiap titik dalam suatu wilayah atau ruang.
Norma	Ukuran panjang atau besar suatu vektor dalam ruang tertentu.

Operator Diferensial	Operator matematis yang melibatkan proses diferensiasi, seperti gradien, divergensi, dan <i>curl</i> .
Parametrisasi	Proses menyatakan koordinat suatu kurva, permukaan, atau objek geometris menggunakan satu atau lebih parameter.
Panjang Busur	Panjang suatu kurva yang dihitung berdasarkan akumulasi elemen-elemen panjang sepanjang lintasan.
Perkalian Silang	Operasi antara dua vektor dalam ruang tiga dimensi yang menghasilkan vektor tegak lurus terhadap kedua vektor tersebut.
Proyeksi Vektor	Komponen suatu vektor yang diarahkan sepanjang vektor lain atau suatu arah tertentu.
Ruang Euclidean	Ruang geometris yang memiliki konsep jarak, panjang, sudut, dan struktur yang mengikuti geometri Euclidean.
Ruang Vektor	Himpunan objek yang dapat dijumlahkan dan dikalikan dengan skalar serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu.
Skalar	Besaran yang hanya memiliki nilai atau besar tanpa arah.
Sistem Koordinat	Kerangka acuan yang digunakan untuk menentukan posisi titik atau objek secara matematis.
Teorema Divergensi	Teorema yang menghubungkan integral volume dari divergensi suatu medan vektor dengan integral permukaan pada batas volume tersebut.

Teorema Green	Teorema yang menghubungkan integral garis pada kurva tertutup dengan integral lipat pada daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut.
Teorema Stokes	Teorema yang menghubungkan integral permukaan dari <i>curl</i> suatu medan vektor dengan integral garis pada batas permukaan.
Turunan Arah	Laju perubahan suatu fungsi pada suatu titik dalam arah tertentu.
Turunan Parsial	Turunan suatu fungsi multivariabel terhadap satu variabel dengan menganggap variabel lainnya konstan.
Vektor	Besaran matematika yang memiliki besar dan arah serta dapat direpresentasikan secara geometris sebagai anak panah.
Vektor Satuan	Vektor yang memiliki norma atau panjang sama dengan satu dan digunakan untuk menunjukkan arah.
Vektor Posisi	Vektor yang menunjukkan posisi suatu titik terhadap titik asal dalam suatu sistem koordinat.
Vektor Nol	Vektor yang seluruh komponennya bernilai nol dan memiliki panjang nol.
Vektor Ortogonal	Dua vektor yang saling tegak lurus, biasanya ditandai dengan hasil <i>dot product</i> yang bernilai nol.
Vektor Paralel	Dua vektor yang memiliki arah sama atau berlawanan dan merupakan kelipatan skalar satu sama lain.

Vektor Resultan

Vektor yang dihasilkan dari penjumlahan dua atau lebih vektor.

Volume

Ukuran ruang tiga dimensi yang dapat dihitung melalui integral lipat atau metode geometris tertentu.

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

20%

INDEKS

A

aljabar, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
13, 17, 18, 19, 21, 24, 28, 29,
31, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41,
42, 43, 45, 48, 50, 57, 60, 61,
71, 73, 77, 78, 79, 83, 91, 92,
117, 123, 137

analisis, i, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 13, 14, 15, 17, 22, 25,
29, 33, 34, 36, 37, 38, 44, 45,
46, 54, 57, 59, 61, 74, 77, 83,
93, 99, 103, 123, 125, 135,
136, 137, 141, 153

B

basis, 20, 25, 38, 39, 49, 54, 57,
67, 68, 69, 72, 74, 79, 80, 81

C

curl, i, 2, 9, 11, 14, 68, 113, 115,
118, 119, 120, 121, 133, 134,
136, 144, 145, 153

D

diferensial, 75, 109, 113, 115,
123, 125, 127, 135, 136, 137,
141
dimensi, 5, 11, 12, 20, 22, 23,
24, 25, 30, 31, 38, 39, 46, 49,
52, 54, 56, 59, 61, 62, 65, 66,
67, 71, 74, 75, 76, 78, 79, 80,
81, 85, 86, 88, 90, 92, 93, 94,

95, 97, 98, 99, 101, 105, 114,
115, 124, 130, 131, 132, 133,
134, 141, 143, 144, 146

divergensi, i, 2, 3, 9, 10, 11, 14,
68, 113, 115, 117, 118, 119,
120, 121, 131, 133, 135, 136,
137, 144, 153

F

fungsi, i, 2, 9, 13, 27, 28, 38, 41,
46, 48, 60, 71, 72, 74, 78, 80,
84, 85, 103, 104, 105, 106,
108, 109, 110, 113, 114, 115,
116, 117, 121, 123, 124, 125,
126, 127, 128, 129, 130, 132,
134, 142, 143, 145, 153

G

garis, i, 2, 11, 13, 14, 21, 23, 30,
35, 38, 47, 50, 53, 64, 78, 80,
83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90,
91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98,
99, 100, 101, 105, 114, 115,
131, 132, 133, 134, 141, 145,
153

geometri, i, 1, 4, 8, 9, 13, 14, 15,
22, 38, 43, 45, 47, 55, 57, 59,
61, 68, 76, 78, 79, 80, 83, 84,
85, 90, 91, 93, 95, 96, 99, 100,
101, 109, 126, 137, 140, 144,
153

gradien, i, 2, 9, 13, 68, 86, 92,
113, 114, 115, 116, 117, 119,

120, 121, 123, 124, 125, 126,
127, 129, 136, 144, 153

I

integral, i, 2, 9, 14, 15, 66, 109,
131, 132, 133, 134, 135, 136,
137, 142, 144, 145, 146, 153

K

kalkulus, i, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9,
13, 14, 15, 22, 60, 61, 79, 80,
103, 104, 108, 113, 120, 123,
124, 131, 132, 134, 136, 137,
140, 142, 153

komponen, 3, 5, 9, 10, 13, 17,
18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 36,
38, 39, 43, 45, 46, 47, 49, 52,
53, 54, 55, 56, 60, 66, 68, 70,
72, 88, 89, 92, 94, 95, 101,
104, 106, 110, 113, 114, 118,
124, 130

koordinat, 2, 9, 10, 13, 18, 19,
21, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 31,
50, 51, 55, 59, 60, 61, 62, 63,
64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72,
79, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 89,
90, 103, 115, 137, 142, 143,
144, 145, 153

kurva, 14, 38, 62, 91, 103, 104,
105, 106, 107, 109, 110, 114,
115, 116, 124, 132, 133, 136,
142, 144, 145

L

linear, 2, 3, 6, 8, 9, 12, 29, 31,
37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 56,

58, 60, 66, 72, 73, 74, 75, 76,
77, 78, 79, 80, 81, 84, 85, 86,
88, 92, 94, 95, 105, 106, 125,
140, 141, 143

M

medan, 1, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 14,
36, 41, 63, 64, 68, 71, 106,
113, 114, 115, 116, 117, 118,
119, 120, 121, 125, 127, 131,
132, 133, 135, 137, 141, 144,
145

O

operasi, i, 2, 4, 5, 6, 11, 14, 17,
18, 22, 24, 28, 29, 31, 35, 37,
40, 41, 42, 43, 45, 49, 50, 52,
56, 58, 60, 71, 72, 73, 74, 92,
93, 104, 153
optimasi, 14, 116, 121, 123, 127,
128, 130, 136

P

parametrik, 84, 85, 86, 94, 103,
105, 106, 107, 109, 110, 143
permukaan, i, 2, 10, 12, 14, 26,
28, 37, 38, 47, 55, 64, 93, 96,
99, 110, 114, 116, 124, 126,
127, 128, 131, 132, 133, 134,
135, 137, 142, 144, 145, 153
produk, 2, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 24,
26, 31, 41, 42, 45, 46, 47, 48,
49, 50, 51, 52, 55, 56, 57, 58,
76, 79, 86, 88, 89, 92, 93, 94,
96, 97, 98, 100, 108, 125, 140

proyeksi, 23, 24, 26, 43, 45, 47,
52, 53, 54, 55, 62, 69, 88, 100,
136

R

ruang, i, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22,
23, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 38,
39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 48,
49, 56, 57, 59, 62, 67, 68, 69,
71, 72, 73, 74, 76, 78, 79, 80,
81, 85, 90, 92, 93, 94, 95, 96,
97, 98, 99, 100, 101, 103, 104,
105, 113, 114, 124, 130, 132,
133, 134, 136, 141, 143, 144,
146, 153

S

silang, 2, 6, 7, 13, 14, 24, 41, 42,
45, 46, 49, 50, 51, 52, 55, 56,
58, 88, 89, 93, 96, 100, 108,
118

skalar, 2, 3, 5, 6, 9, 12, 13, 15,
17, 18, 19, 20, 21, 22, 28, 29,
31, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 43,
45, 48, 49, 50, 53, 55, 56, 57,
60, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78,
80, 84, 85, 86, 91, 94, 101,
104, 106, 108, 113, 114, 115,
116, 117, 119, 120, 125, 127,
132, 141, 142, 143, 144, 145,
153

T

teorema, i, 2, 14, 25, 60, 90, 91,
104, 124, 129, 131, 132, 133,
134, 135, 136, 137, 153

titik, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13,
19, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32,
33, 34, 36, 38, 42, 44, 45, 46,
47, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 59,
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67,
68, 69, 72, 78, 79, 80, 81, 84,
85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92,
93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100,
101, 104, 105, 106, 107, 108,
110, 113, 114, 115, 116, 117,
118, 119, 121, 125, 126, 127,
128, 129, 130, 132, 134, 137,
141, 142, 143, 144, 145

transformasi, 3, 18, 19, 28, 36,
59, 60, 61, 63, 65, 66, 67, 69,
70, 72, 78, 79, 80, 81, 141,
143

turunan, i, 2, 9, 13, 19, 68, 80,
103, 106, 108, 109, 110, 111,
115, 117, 123, 124, 125, 126,
127, 130, 134, 141, 142, 153

V

vektor, i, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18,
19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34,
35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42,
43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50,
51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, 66, 67, 68, 69, 71, 72,
73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80,
81, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 90,
91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98,
99, 100, 101, 103, 104, 105,
106, 107, 108, 109, 110, 113,
114, 115, 116, 117, 118, 119,

120, 123, 125, 126, 127, 131,
132, 133, 134, 135, 136, 137,

140, 141, 142, 143, 144, 145,
146, 153

$$a(a+b) = (a \times a) + (a \times b)$$

45%

BIOGRAFI PENULIS



Fitriana Minggani, S.Si., M.Si.

Lahir di Sumenep, 31 Mei 1987. Lulus S1 dan S2 Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, masing-masing tahun 2010 dan 2012. Saat ini sebagai Dosen PNS Dpk di Universitas PGRI Sumenep pada Program Studi Pendidikan Matematika.

Buku Referensi

KAJIAN TEORITIS ANALISIS VEKTOR DAN PENERAPANNYA PADA GEOMETRI ANALITIK DAN KALKULUS MULTIVARIABEL

Buku referensi “Kajian Teoritis Analisis Vektor dan Penerapannya pada Geometri Analitik dan Kalkulus Multivariabel” membahas secara komprehensif konsep, prinsip, dan penerapan analisis vektor sebagai salah satu fondasi penting dalam perkembangan matematika modern. Berangkat dari pemahaman mengenai besaran skalar dan vektor, buku ini mengkaji operasi vektor, ruang vektor, sistem koordinat, garis dan bidang, serta berbagai konsep geometris yang menjadi dasar dalam geometri analitik. Pembahasan mencakup fungsi multivariabel, limit dan kontinuitas, turunan parsial, gradien, divergensi, curl, integral lipat, integral garis, integral permukaan, hingga penerapan teorema-teorema fundamental dalam analisis vektor. Buku ini diharapkan dapat menjadi referensi yang sistematis bagi mahasiswa, pendidik, peneliti, dan pembaca dalam memahami keterkaitan antara analisis vektor, geometri analitik, dan kalkulus multivariabel serta penerapannya dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.